LİSE KİTAPLARI

# CEBİR

## II

## (Fen Kolu)

MEHMET ARSLANTÜRK

Millî Eğitim Bakanlığının 18 Haziran 1970 tarih ve 10078 sayılı emirleriyle Liselerin II. sınıf fen kollarında ders kitabı olarak okutulması kabul edilmiştir.

22 inci Baskı

GENÇLİK KİTABEVİ
Muvvakkithane Cad. No. 38
1972 Tel.: 36 30 17

KUTULMUŞ MATBAASI
Yerebatan Caddesi No. 35
Tel: 22 86 76, İstanbul 1972

# ÖNSÖZ

Lise müfredat programına uygun olarak düzenlenen «Cebir» kitapları serisini yeniden yayınlamış bulunuyorum. Bu kitapların hazırlanışında gözönünde tutulan esaslar şunlardır :

1 — Tariflerin kısa ve açık olması,

2 — Teoremlerin, genel ispata geçmedn önce - imkân nisbetinde - nümerik örnekler üzerinde sağlanması,

3 — Alıştırma (*) ve problemlerin kolaydan güce doğru sıralanması ve özellikle alıştırmalardan bir kısmının güç problemler ayarında bulunması.

Bunlardan başka ;

a) Teoremlerin ispatlarında ve alıştırmaların çözümlerinde, ne öğrencileri passif duruma sokacak derecede açıklamalar yapılmış; ne de öğrencileri yıldıracak ve lüzumsuz zaman kaybına meydana verecek sorular sorulmuştur.

b) Metin içi soruları ise, kolay ve az zamanda cevaplandırılabilecek mahiyettedir. Öğrencileri - problemlerle birlikte - metin içinde de muhakemeye sevketmek ve aktif durumda bulundurmak esas tutulmuştur.

c) Kitapların sade ve tabiî bir dille yazılmasına ve bunlarda, terim ve imlâ bakımından birlik temin edilmesine çalışılmıştır.

Bu kitaplarımın, 22 yılı aşan bir süreden beri, her yeni baskısında, daima Sayın Meslekdaşlarımın değerli tenkit, ikaz ve teşvikleri gözönünde bulundurulmuştur. Bu kitap «Çözülmüş Cebir Problemleri II Fen kolu» adlı kitabımla bir bütün teşkil etmektedir.

**Mehmet ARSLANTÜRK**
Ekim 1972, Tandoğan Meydanı

---

(*) «Alıştırma» kelimesi çözülmüş problemler mânasında kullanılmıştır.

# İÇİNDEKİLER

## BİRİNCİ BÖLÜM

### Üslü kemiyetler


1 — Ülü kamiyetin tarifi ... 1
2 — Üslü kemiyetlerin grafikle gösterilmesi ... 2
3 — Üslü kemiyetler üzerine işlemler ... 3


## İKİNCİ BÖLÜM

### Köklü kemiyetler


4 — Köklü kemiyetler ... 14
5 — Köklü kemiyetlerin grafikle gösterilmesi ... 15
6 — Köklü kemiyetler üzerine işlemler ... 16
7 — Kare kök alma ... 30


## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

### Logaritma


1 — Logaritma tarifi ... 34
2 — Logaritma üzerine çözülmüş örnekler ... 35
3 — Üslü ve logaritmik fonksiyonların grafikle gösterilmesi ... 36
4 — Kullanılan logaritma sistemleri ... 41
5 — Logaritma özellikleri ... 42
6 — Logaritma özellikleri üzerine çözülmüş örnekler ... 43
7 — Bayağı logaritmaların incelenmesi ... 45
8 — Trigonometrik fonksiyonların logaritmalarının hesabı ... 54


## DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

### Bir bilinmiyenli ikinci derece denklemleri


1 — Tarif ... 59
2 — Bir bilinmiyenli ikinci derece denkleminin çözümü ... 59
3 — Bir bilinmiyenli ikinci derec denklemleri üzerine örnekler ... 63
4 — İkinci derece denklemlerinin kökleriyle katsayıları arasındaki bağıntılar ... 69
5 — Çözümleri ikinci dereceye götürülebilen denklemler ... 80
6 — İkinci derece problemleri ... 94

## BEŞİNCİ BÖLÜM

### İkinci derec üçterimlisinin işareti — Eşitsizlikler


1 — İkinci derec içterimlisinin işaretinin incelenmesi ... 100
2 — İkinci derece parametrik denklemlerin incelenmesi ... 104
3 — Verilen iki sayının bir ikinci derece üçterimlisinin köklerine göre yerleri ... 105
4 — Bir bilinmiyenli ikinci derece eşitsizlikleri ... 112


## ALTINCI BÖLÜM


A. $y = ax^2+bx+c$ fonksiyonunun değişim ve grafiği ... 129

B. $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği ... 129


## YEDİNCİ BÖLÜM


A. Koordinat eksenlerinin kendilerine paralel olarak kaydırılması ... 148

B. Koordinat eksenlerine, başlangıç noktasına, koordinat eksenlerinin açı ortaylarına göre simetri ... 153


## SEKİZİNCİ BÖLÜM


A. Türevin geometrik tarifi ve anlamı ... 159


## DOKUZUNCU BÖLÜM

### Diziler. Aritmetik ve Geometrik diziler


1 — Tarif ... 169
2 — Diziler üzerine ödevler ... 162
3 — Aritmetik dizi ve özellikleri ... 170
4 — Aritmetik diziye ait özellikler ... 170
5 — Aritmetik dizi üzerine problemler ... 175
6 — Geometrik dizi ve özellikleri ... 177
7 — Geometrik diziye ait özellikler ... 178
8 — Geometrik dizi üzerine problemler ... 182


## ONUNCU BÖLÜM

### Bileşik faiz ve taksitle borç ödeme


1 — Bileşik faiz ... 186
2 — Taksitle kapital teşkili ve borç ödeme ... 188
3 — Bileşik faiz, kapital teşkili ve borç ödeme üzerine problemler ... 191

## Lise II. Sınıf Fen kolu Cebir Müfredat Programı: (*)

1 — Üslü kemiyet kavramı : Üsleri pozitif ve negatif tamsayı olan üslü kemiyetler üzerine çeşitli işlemler.

Köklü kemiyet kavramı : Üssü kesir olan üslü kemiyetler üzerine çeşitli işlemler. Karakök alma.

Logaritma kavramı : Logaritmanın özellikleri. Logaritma cedveli yardımıyla hesaplamalar.

2 — İkinci dereceden bir bilinmiyenli denklemlerin çözümü. Köklerle katsayılar arasındaki münasebetler. Çözümleri ikinci derece denklemine indirilebilen denklemler. (Çift kareli ve Irrasyonel denklemlerden basit örnekler). İkinci dereceden denklemlerle çözülebilen problemler.

3 — $ax^2+bx+a$, ifadesinin işaretinin incelenmesi. İkinci dereceden parametrik denklemlerde verilen bir veya iki sayının köklere göre durumlarının incelenmesi. İkinci dereceden bir bilinmiyenli eşitsizliklerin çözümü.

4 — $y = ax^2+bx+c$, $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ fonksiyonlarının değişimlerinin incelenmesi ve grafiklerinin çizilmesi.

5 — Koordinat eksenlerinin kendilerine paralel olarak kaydırılmaları. Parabol ve homografik fonksiyonlara uygulanması. Koordinat eksenlerine, açıortaylara ve başlangıç noktasına göre simetri. Parabol ve homografik fonksiyonlara ait grafiklerin simetri özellikleri.

6 — Değişkenin bir değeri için türevin geometrik tarifi ve anlamı. Değişkenin verilen bir değeri için $y=ax^2+bx+c$, $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanması. Bu fonksiyonlara ait eğrilerin verilen bir noktasındaki teğetinin denklemi.

7 — Aritmetik ve geometrik diziler.

8 — Bileşik faiz ve taksitle borç ödeme

---

(*) 7 Ekim 1957 tarih ve 976 sayılı Tebliğler dergisinden alınmıştır.

*BİRİNCİ BÖLÜM*

# ÜSLÜ KEMİYETLER

## 1. Üslü Kemiyetin Tarifi

m tam ve pozitif, a da cebirsel birer sayı olduklarına göre, a ya eşit m sayıda çarpanın çarpımına a nın m yinci kuvveti denir. a nın m yinci kuvveti $a^m$ semboliyle gösterilir ve «a üzeri m veya «a üssü m» diye okunur. Böylece $a^m$ semboliyle gösterilen kemiyetlere «üslü kemiyet» ler denir.

Bu tarife göre

$$a^m = a.a.a.a...a \text{ (m tane) dir.}$$

Burada a cebirsel sayısına üslü kemiyetin taban'ı; m sayısına üssü ve a nın m yinci kuvvetini bulmak için yapılan işleme de *kuvvete yükseltme* denir.

ÖRNEKLER;

$a^1 = a$
$a^2 = a.a$
$a^3 = a.a.a$
. . . . . .
$a^5 = a.a.a.a.a$

Not. 1. — m=2 olduğunda $a^2$ üslü kemiyetine a sayısının karesi, m=3 olduğunda $a^3$ e de a sayısının kübü denir.

2. — Bir çarpımın işaret kaidesinden faydalanılarak, $a \neq 0$ olmak üzere, doğrudan doğruya:

1) a pozitif iken m ne olursa olsun $a^m$ daima pozitiftir;

2) a negatif iken m çift ise $a^m$ pozitif; m tekse negatiftir.

SONUÇ: Cebirsel bir sayının çift kuvveti daima pozitif, tek kuvveti ise bu sayı ile ayni işaretlidir:

$$(\mp a)^{2n+1} = \mp a^{2n+1},\ (\mp a)^{2n} = a^{2n} \quad \text{dir.}$$

ÖRNEKLER:

$(+2)^3 = 8$; $(+5)^2 = 25$; $(-3)^2 = 9$; $(-3)^3 = -27$; $3^5 = 243$

$$\left(-\frac{5}{4}\right)^4 = +\left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}; \quad (-0{,}7)^3 = -0{,}343.$$

$m \neq \infty$ olmak üzere m nin çift veya tek oluşuna göre $(-1)^m$ yi bulunuz?

n çift veya tek olduğuna göre, $(+a)^n = ?$ yi ve $(-a)^n = ?$ yi bulunuz.

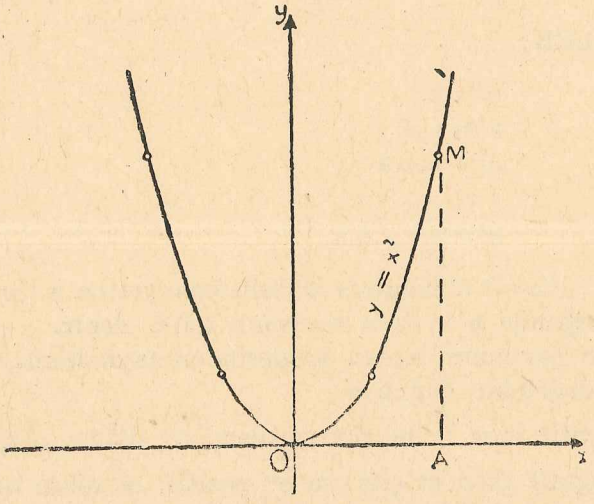
## 2. Üslü Kemiyetlerin Grafikle Gösterilmesi

Örnek olarak $y = x^2$ ve $y = x^3$ üslü kemiyetlerini alalım.

a) $y = x^2$ ikinci derece fonksiyonunun gösterdiği grafik, x serbest değişkenine verilen muhtelif değerlere karşı y fonksiyonunun alacağı değerleri gösterir bir tablo düzenlemek suretiyle çizilir (Şek. 1)

Tablo:

| x | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $4$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $4$ |




Şekil: 1

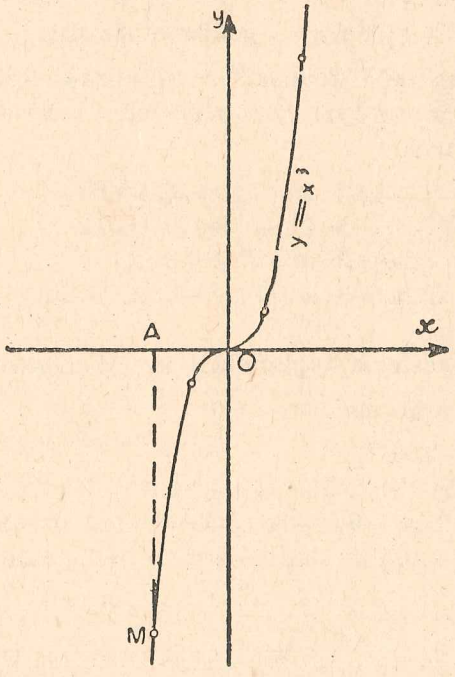
Bu eğriye ikinci derece parabol'ü adı verilir. Burada OY ye parabolün ekseni, «O» başlangıç noktasına da tepesi denir.

Bu grafik bir sayının karesinin yaklaşık olarak hesabında kullanılabilir. Bunun için karesi alınacak a sayısı apsis olarak alınır ve grafikte bu apsise ait ordinat a sayısının aranılan karesidir. Şekilde $OA=a$; $AM=a^2$ dir.

b) $y=x^3$ üçüncü derece fonksiyonunun gösterdiği grafik te x ve y nin karşılıklı değer tablosu düzenlenerek çizilir (Şek. 2). Burada $x=\mp a$ için $y=\mp b$ olduğuna dikkat ediniz. Bu grafik te bir sayının kübünün hesabında kullanılır. Bunun için, kare hesabında ol-

Tablo:

| x | −2 | −1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | −8 | −1 | $-\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | 8 |




Şekil: 2

duğu gibi, kübü alınacak a sayısı apsis olarak alınır ve grafikte bu apsise ait ordinat a sayısının aranılan kübüdür. Şekilde $OA=a$; $AM=a^3$ dür.

## 3. Üslü Kemiyetler Üzerine İşlemler

**1. Üslü kemiyetlerin toplanması ve çıkarılması. —**

$5.4^2+2.4^2=(5+2).4^2=7.4^2$

$5.4^2-2.4^2=(5-2).4^2=3.4^2$.

Eşitliklerinin doğruluğunu her iki eşitliğin iki yanındaki değerleri hesabederek gösteriniz.

$7.2^3+4.2^3=(7+4).2^3=11.2^3$
$7.2^3-4.2^3=(7-4).2^3=\ 3.2^3$

Eşitliklerinin doğruluğunu da aynı düşünüşle gösteriniz. Bunlar gibi.

$7a^3+4a^3=(7+4)a^3=11a^3,$

$7a^3-4a^3=(7-4)a^3=\ 3a^3.$

Eşitlikleri de doğrudur. Örneklerde görüldüğü üzere, üslü kemiyetler taban ve üsleri birbirine eşit - kısaca benzer - olduklarında toplanıp çıkarılabilir (*). Genel olarak bu sonuç,

$pa^m \mp sa^m=(p\mp s)a^m$ şeklinde yazılır.

Benzer olmıyan üslü kemiyetler yukardaki şekilde toplanıp çıkarılamazlar. Bunların ayrı ayrı değerleri hesabedilir ve sonra toplanır veya çıkarılırlar:

$7.2^3+3.2^2=7.8+3.4=68$
$7.2^3-3.2^2=7\ \ 8-3.4=44$
$7.a^3+3.a^2=7.a^3+3.a^2$
$7.a^3-3.a^2=7.a^3-3.a^2$ dir.

**2. Üslü kemiyetlerin toplanması ve çıkarılması üzerine;**

**a) Çözülmüş örnekler:**

1) $2^2+6^2=4+36=40;$
2) $3^3+4.3^3+5.3^3-8.3^3=(1+4+5-8).3^3=2.3^3;$
3) $2a^3-4a^3+11a^3-6a^3-3a^3=(2-4+11-6-3)a^3=0;$
4) $7ab^n-5ab^m+10ab^n-8ab^m-15ab^n+10ab^m=2ab^n-3ab^m.$

**b) Ödevler:**

1) $3^2+7^2;$ 2) $7^2-5^2;$ 3) $6^2+5^2-4^2;$ 4) $3.4^3-7.4^3+5.4^3;$

5) $18\left(1\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^3.128-72\left(1\frac{1}{3}\right)^2$ 6) $\frac{1}{2}\cdot 3^2+\frac{1}{3}.2^2-\frac{1}{5}.10^2;$

7) $10\left(1\frac{1}{2}\right)^2-3\left(2\frac{1}{3}\right)^2+5\left(3\frac{3}{4}\right)^2;$ 8) $5x^3-2x^3+3x^3-x^3;$

9) $5x^4-2x^4+3x^4-6x^4;$ 10) $5ab^m+7ab^m-3ab^m-4ab^m+2ab^m;$

---

(*) Tarif. Taban ve üsleri birbirine eşit olan üslü kemiyetlere benzer üslü kemiyetler denir.

11) $4ba^m+4ca^m+5ba^m-12ca^m+2ba^m+6ca^m$; 12) $\frac{1}{2}a^m-\frac{5}{2}a^m+2a^m$;

13) $(a-b)^2-(a+b)^2$; 14) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$;

15) $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2$; 16) $(a-b)^3-(a+b)^3-2b^3+6a^2b$;

17) $(a+b+1)^2-(a-b+1)^2-(a-b-1)^2+(a+b-1)^2$.

### 3. Üslü kemiyetlerin çarpılması.

**Teorem. — Tabanları aynı olan üslü kemiyetleri çarpmak için ortak taban üslerin toplamına yükseltilir.**

İspatı:

Örnek olarak $a^5 . a^3$ ü alalım.

$a^5 = a.a.a.a.a$ ; $a^3 = a.a.a$ dır. Buradan,

$a^5.a^3 = a.a.a.a.a.a.a.a = a^{5+3} = a^8$ olur.

Genel olarak,

$a^m = a.a\ a \ldots a$ (m tane)

$a^n = a.a.a \ldots a$ (n tane)

$a^m a^n = (a.a.a \ldots a) . (a.a.a \ldots a)$

» $= a.a.a \ldots\ldots a$ (m+n tane)

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$ olur.

Bu eşitlikte yanların yerleri değiştirilirse,

$$\boxed{a^{m+n} = a^m . a^n}$$ elde edilir.

O halde, (Karşıt teorem);

**Bir sayıyı cebirsel bir toplama yükseltmek için, sayı; yükseltme kuvveti cebirsel toplamı meydana getiren sayılara ayrı ayrı yükseltilir ve elde edilen üslü kemiyetler birbiriyle çarpılır.**

Yukarıda açıklanan esas teoremden,

$a^m . a^n . a^p = a^{m+n} . a^p = a^{m+n+p}$ ve

$a^m . a^n . a^p . a^r = a^{m+n+p} . a^r = a^{m+n+p+r}$

yazılır ve böylece devam edilebilir.

Bu son eşitlikte, $m = n = p = r$ olursa,

$a^m . a^m . a^m . a^m = a^{m+m+m+m}$ olur.

$(a^m)^4 = a^{4m}$ bulunur.

Daha genel olarak $\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$ olduğu kolayca görülür.

O halde :

**Bir sayının herhangi bir kuvvetini diğer bir kuvvete yükseltmek için, bu sayıyı üslerin çarpımına yükseltmelidir.**

Not. — $(a^m)^n = a^{mn} = a^{nm}$ bağıntısından,

$\boxed{(a^m)^n = (a^n)^m}$ elde edilir.

**Teorem — Üsleri aynı olan üslü kemiyetleri çarpmak için, tabanların çarpımı ortak üs kuvvetine yükseltilir.**

Sağlama :

a) $2^3, 5^3 = (2.5)^3$; b) $3^4 . 2^4 = (3.2)^4$; c) $25^2 . 3^2 = (25.3)^2$

Bu eşitliklerin doğruluklarını hesabederek gerçekleyiniz.

İspatı :

Örnek olarak $a^3 . b^3$ ü alalım.

$a^3 = a.a.a$

$b^3 = b.b,b$ buradan,

$a^3 . b^3 = a.a.a.b.b.b$

ve bir çarpımda çarpanların yer değiştirme özeliğinden :

$a^3 . b^3 = (ab).(ab).(ab)$ ve

$a^3 . b^3 = (ab)^3$ olur.

Genel olarak,

$a^m . b^m = ?$

$a^m = a.a,a \ldots a$ (m tane)

$b^m = b.b.b \ldots, b$ (m tane)

$a^m.b^m = (a.a.a \ldots a).(b.b.b \ldots b)$

» $= (ab).(ab).(ab) \ldots (ab)$ (m tane ab)

$\boxed{a^m . b^m = (ab)^m}$ olur. Buradan,

$a^m.b^m.c^m = (ab)^m.c^m = (abc)^m$ yazılır ve böylece devam edebilir.

Bu eşitlikte yanların yerleri değiştirilirse :

$$\boxed{(abc)^m = a^m b^m c^m}$$ olur.

O halde, (Karşıt teorem);

**Bir çarpımı bir kuvvete yükseltmek için, her çarpan ayrı ayrı bu kuvvete yükseltilir ve sonuçları çarpılır.**

4. **Üslü kemiyetlerin çarpılması üzerine,**

a) **Çözülmüş örnekler :**

1) $7^2.7^5 = 7^{2+5} = 7^7$; 2) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{5.3.6}{3.2.5}\right)^2 = 3^2 = 9$$

3) $(4ab^2c^3)^2 = 16a^2b^4c^6$; 4) $(2a+nb)^8.(2a+nb)^2.(2a+nb).(2a+nb)^0$

$$= (2a+nb)^{11}.$$

5) $$\frac{m^a + n^b}{m^a - n^b} - \frac{m^a - n^c}{m^a + n^b} + \frac{(m^a + n^b)^2 - (m^a - n^b)^2}{m^{2a} - n^{2b}} =$$

$$\frac{(m^a + n^b + m^a - n^b)\ (m^a + n^b - m^a + n^b)}{m^{2a} - n^{2b}} = \frac{4m^a n^b}{m^{2a} - n^{2b}}$$

b) **Ödevler :**

1) $a^2 . a^3$; 2) $3a^4 . 5a^3 . 7a$; 3) $a^3.a^{m-3}$; 4) $b^{m-4}.b^{3+m}$

5) $x^n . x^{n-1} . x^{3-2n}$; 6) $a^{n-2} . b^{n-1} . a^2b$; 7) $x^3 . y^2 . x^{n-3} . y^{n-2}$

8) $(m-n)^2 . (m+n)^2$; 9) $(2m)^{a+2} . (5m)^{a+2}$;

10) $a^{m-n+2}(x-y)^{m-n+2} . a^{n-3} . (x-y)^{m-1}\ a\ (x-y)^{n-m-1}$;

11) $(a^{2m-n} + a^{m+n} + a^{3m-n})\ (a^{n-m} + a^n)$;

12) $(-3a^2 . b^{m-1})\ (4a^{m-3} c^{m-3})\ (-2abc^3)$; 13) $(a-b)^{2m-5} . (b-a)^5$;

14) $(a . b^2 . c^3 - a^2 . b^3 . c + a^3 . b . c^2) . a^3b^3c^4$;

15) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{10} \left(\frac{c^2-d^2}{a^2-b^2}\right)^{10} \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{10}$ 16) $\left(\frac{x-y}{m-n}\right)^3 \left(\frac{m-n}{x+y}\right)^3$;

17) $\left(\frac{2a-3b}{5c-7d}\right)^3 \cdot \left(\frac{5c-7d}{4a-6b}\right)^3$; 18) $\left(\frac{a^3b^5}{m^4n^4}\right)^5 \cdot \left(\frac{a^2b^3}{m^4n^5}\right)^5 \cdot \left(\frac{m^6n^{10}}{a^4b^7}\right)^7 \cdot$

**5. Üslü kemiyetlerin bölünmesi :**

**Teorem· — Üsleri aynı olan, iki üslü kemiyeti birbirine bölmek için, tabanlar bölünür ve sonuç ortak üsse yükseltilir.**

Sağlama :

a) $\frac{7^2}{3^2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$ b) $\frac{3^3}{5^3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$; c) $\frac{2^4 . 7^4}{9^4} = \left(\frac{2.7}{9}\right)^4$.

Bu eşitliklerin doğruluklarını hesaplıyarak sağlayınız.

İspatı :

Örnek olarak $\frac{a^3}{b^3}$ ü alalım.

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a.a.a}{b.b.b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

olur. Genel olarak,

$$\frac{a^m}{a^m} = ?$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a.a.a \ldots a}^{\text{(m tane a)}}}{\underbrace{b.b.b \ldots b}_{\text{(m tane b)}}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} \quad \left(\text{m tane } \frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \text{olur.}$$

Bu eşitlikte yanların yerleri değiştirilirse,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad \text{elde edilir.}$$

O halde, (Karşıt teorem);

**İki sayının bölümünü herhangi bir kuvvete yükseltmek için, bölümün terimleri bu kuvvete yükseltilir ve elde edilen üslü kemiyetler birbirine bölünür.**

**Teorem. — Tabanları aynı olan iki üslü kemiyetin bölümü.**

$$\frac{a^m}{a^n},$$

iki üslü kemiyetin bölümü olsun.

1°. $m>n$ ise, m ve n tam ve pozitif olduklarından, $m=n+p$ konulabilir. O halde,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+p}}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^p}{a^n} = a^p = a^{m-n} \quad \text{olur.}$$

2°. $m=n$ ise, her iki terim eşit olacağından,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1 \quad \text{olur.}$$

3°. $m<n$ ise, m ve n tam ve pozitif olduklarından, $m=n-p$ ve buradan, $n=m+p$ konulabilir. O halde,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m a^p} = \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{olur.}$$

**6. Üssü negatif ve sıfır olan kemiyetler.** — Yukarda, tabanları aynı olan iki üslü kemiyetin bölümünü hesabederken üç farklı şekil elde edilmişti:

$$m>n \text{ ise, } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad m=n \text{ ise, } \frac{a^m}{a^n} = 1; \quad m<n \text{ ise, } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (1)$$

Sıfır ve negatif tam üsler tarif edilerek bu üç şekil ilk formülde birleştirilebilir.

**«O» Üs.** — $m = n$ halinde (1) formülünün iikini uygulıyalım. $m - n = 0$ olur ve

$$\frac{a^m}{a^n} = a^0$$

olur, aritmetik bakımından ise :

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \quad \text{dir.}$$

O halde,

$m=n$ olduğunda da ilk formül uygulanmak istenirse, «O» üssün tarifini teşkil eden aşağıdaki kabülü yapmak gerekir.

a sıfırdan faklı herhangi sonlu cebirsel sayı ise,

$$\boxed{a^0 = 1} \quad \text{dir.}$$

**Negatif üs.** — Negatif üssün tarifine ulaşmak için, nümerik bir örnek alalım. Örnek $\frac{a^2}{a^5}$ olsun. Aritmetikten,

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{a^2}{a^{2+3}} = \frac{a^2}{a^2\,a^3} = \frac{1}{a^3} \quad \text{olur.}$$

(I) formülünün ilki uygulanırsa ;

$$\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3} \quad \text{bulunur.}$$

O halde, $m<n$ olduğunda da ilk formül uygulanmak istenirse, negatif üssün tarifini teşkil eden aşağıdaki kabulü yapmak gerekir.

m tam ve pozitif bir sayı ise:

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \quad \text{dir.}$$

Buna göre, negatif üslü bir kemiyet, pozitif üslüsünün tersine eşittir.

NOT. — Bu kabullerle üslü kemiyetler içine giren sıfır ve negatif üslü kemiyetler için de, pozitif üslü kemiyetlerde ispatlanmış olan bütün kaidelerin doğruluğu kolayca gerçeklenebilir.

Örnek olarak m ve n negatif olduklarında $a^m.a^n = a^{m+n}$ olduğunu gösterelim.

$$m = -5, \quad n = -3 \quad \text{olsun.}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{-5} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{5+3}} = a^{-(5+3)} = a^{-5+(-3)} \quad \text{olur.}$$

Genel olarak,

$$n = -m' \; ; \quad m = -m' \quad \text{olsun.}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{-m'} \cdot a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-(m'+n')} = a^{m+n}$$

elde edilir.

m negatif ve n pozitif olduğunda ayni formülün doğruluğunu gösteriniz.

m ve n nin her ikisi birden negatif veya biri pozitif diğeri negatif olmaları halinde,

$(a^m)^n = a^{mn}$ formülünün doğruluğunu gösteriniz.

Buraya kadar söylenilenlerden özet olarak, $a^m$ üslü kemiyetinin, a sıfırdan farklı cebirsel bir sayı olmak üzere, m nin pozitif, negatif ve sıfır her tam değeri için bir anlamı bulunduğu anlaşılır.

**7. Üslü kemiyetlerin bölünmesi üzerine,**

**a) Çözülmüş örnekler :**

1) $\frac{6a^4b^5c^2}{2a^3b^2} = 3ab^3 . c^2$ ; 2) $\frac{-3x^2yz^4}{15x^5y^2z^3} = -\frac{1}{3} zx^{-3} . y^{-1}$

3) $\left(\frac{m+n}{a+b}\right)^c : \left(\frac{m-n}{a+b}\right)^c = \left(\frac{m+n}{a+b} : \frac{m-n}{a+b}\right)^c = \left[\frac{(m+n)(a+b)}{(a+b)(m-n)}\right]^c = \left(\frac{m+n}{m-n}\right)^c$

4) $\frac{a^{m+3} . b^{2n}}{a^{4-3m} . b^{3n-1}} = a^{(m+3)-(4-3m)} . b^{2n-(3n-1)} = a^{4m-1} . b^{1-n}$.

**b) Ödevler :**

1) $\frac{5^3}{5^2}$ ; 2) $\frac{3^2}{3^5}$ ; 3) $\frac{4^3}{4^3}$ ; 4) $\frac{10.3^3}{5 . 3^8}$ 5) $\frac{a^7}{a^3}$ ;

6) $\frac{a^{10}}{a^7}$ ; 7) $\frac{b^{12}}{b^9}$ ; 8) $\frac{x^5}{x^3}$ ; 9) $\frac{x^5}{x^8}$ ; 10) $\frac{b}{b^5}$ ;

11) $\frac{a^n}{a^3}$ ; 12) $\frac{a^4}{a^{n-1}}$ ; 13) $\frac{a^3}{a^{n+1}}$ ; 14) $\frac{b^3}{b^{5-x}}$ ; 15) $\frac{b^{2x}}{b^{3x-1}}$ ;

16) $\frac{c^{-2x}}{c^{-3x+1}}$ ; 17) $\frac{-8a^2b^4c^3}{2a^2b^2c}$ ; 18) $\frac{-\frac{3}{4} x^2yz^4}{-\frac{15}{2} xyz^2}$ ; 19) $\frac{3a^2b^2c}{12a^4b^3c^3}$

20) $\frac{-18x^3yz}{24xy^4z}$ ; 21) $\frac{\frac{7}{3} a^2b^3c^2}{-\frac{21}{2} a^4b}$ ; 22) $\frac{a^{b+2c+3d}}{a^{2b+3c+4d}}$ ; 23) $\frac{-5x^4y^4}{-2x^3y^3z}$ ;

24) $\frac{a^{2m+3n-4c+5d}}{a^{m+4n-3c+4d}}$ ; 25) $\frac{a^{m+2} . b^{n-1}}{a^m . b}$ ; 26) $\frac{a^m b^{m-2}}{a^n b^{n-2}}$ ; 27) $\frac{3ab}{x^2y}$ ;

28) $\frac{a^{m+2} . b^{2n}}{a^{3-4m} . b^{1-2n}}$ .

## 8. Birinci bölüm üzerine ödevler :

### I. Aşağıdaki üslü kemiyetleri sadeleştiriniz :

1) $\dfrac{a^{m-2n+p} \cdot b^{-2n-p-m}}{x^{2p-n+2m} y^{2m-p+n}} : \dfrac{x^{2n-m-p} \cdot y^{2p-m}}{a^{n-p} \cdot b^{p+2m+n}}$ 2) $\dfrac{a^{5m} b^{7n}}{c^{4p}} : \dfrac{a^{3m} \cdot b^{5n}}{c^{2p}}$

3) $\dfrac{a^{3x+y} \cdot b^{3y+4x}}{c^{7x+2y}} : \dfrac{a^{3x-y} \cdot b^{3y+5x}}{c^{2y}}$; 4) $\dfrac{10a^m b^{m+1} c^{m+2}}{32x^{n-1} y^{n-1} z^{-1}} : \dfrac{5a^{m-1} \cdot b^{m+2} \cdot c^{m+3}}{8x^{n-2} \cdot y^{n-3} \cdot z^{n-4}}$;

5) $\dfrac{a^{5m-6n}}{a^{8m-9n}} \cdot \dfrac{a^{7m-8n}}{a^{10m-11n}} : \dfrac{a^{12m-13n}}{a^{14m-15n}}$; 6) $\dfrac{(m-n)^{3a-b+2c}}{(m-n)^{2a+c-b}}$;

7) $\dfrac{t^{x-16y+2z} \cdot m^{11x-y} \cdot n^{z-13x}}{a^{10x+y} \cdot b^{21y-x} \cdot c^{x+3v-z}} : \dfrac{m^{10x-2y} \cdot n^{y+z-14x}}{a^{11x} \cdot b^{20y} \cdot c^{3v} \cdot t^{15y-2x}}$; 8) $\dfrac{a^{x-y} \cdot b^{3y-2x}}{a^{-y} \cdot b^{2y-2x}}$;

9) $\dfrac{[ax^2 - bx^2)(a+b)]^{t+2}}{(a^2-b^2)^t} : [(a-b)(a+b)]^2$;

10) $\left(\dfrac{m+n}{a+b}\right)^p : \left(\dfrac{a-m}{a+b}\right)^p : \left(\dfrac{m+n}{a+m}\right)^p$.

### II. Aşağıdaki ifadeleri mümkün olduğu kadar kısaltınız:

1) $\left(\dfrac{a^{2x+3y}}{a^{2y+x}} + \dfrac{a^{7y+z}}{a^{8y}}\right) \cdot \dfrac{1}{a^x}$; 2) $\left(\dfrac{5x^2}{7x} - \dfrac{2x^4y}{3x^3}\right) \cdot 9xy$;

3) $\left(\dfrac{m+n}{m-n}\right)^2 + \left(\dfrac{m-n}{m+n}\right)^2 - \dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$; 4) $\left(\dfrac{a^{2m+3n}}{a^{m+n}} + \dfrac{c^{7x+2y}}{c^{3x-y}}\right) \cdot \dfrac{a^m}{c^x}$;

5) $\left(\dfrac{2^m}{2^n} + \dfrac{2^{2n}}{2^m} + 2\right) \cdot 2^{m+n}$ 6) $\left(\dfrac{x^n}{x^m} - \dfrac{x^{3n}}{x^m} + 1\right) : x^{2m+3n}$

### III. Aşağıdaki çokterimli ifadeleri tek-terimlilerle bölünüz:

1) $(a^2b^7 - a^3b^8 + a^5b^{10}) : ab^6$; 2) $(ax^7 + bx^5) : x^3$;

3) $(5x^5 - 3x^4 + 4x^3) : \dfrac{1}{2}x^2$; 4) $(ax^m + bx^{m+n} + cx^n) : x^{m-n}$;

5) $(2x^7 - 4x^6 + 3x^5 + 7x^4) : 6x^2$;

6) $(5x^3y^2z + 10x^2y^4z^2 - 2xy^3z^2yz^4) : -5x^2yz$.

### IV. Aşağıdaki çokterimli ifadeleri çokterimlilerle bölünüz :

1) $(2x^4 + 6x^4 - 23x^3 + 2x^2 + 16x - 3) : (x^2 + 5x - 1)$;

2) $(x^n - 1) : (x - 1)$;

3) $(a^4 + a^2b^2 + b^4) : (a^2 - ab + b^2)$;

4) $(a^6 - b^6) : (a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$;

5) $(6a^6+5a^5b-a^4b^2+4a^3b^3-17a^2b^4+8ab^5-b^6):(3a^4-2a^3b+4a^2b^2-5ab^3+b^4)$;

6) $(x^n+1):(x+1)$; 7) $(x^{2m}-y^{2n}):(x^m-y^n)$.

**V. Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.**

1) $(a^2-2ab+b^2)^m:(a-b)^m$; 2) $(a^4-b^4)^3:(a^2-b^2)^3$;

3) $(x^{2m}-x^{2n})^p:(x^m-x^n)^p$; 4) $(16x^2-49y^2)^m:(4x+7y)^m$;

5) $(18a^2+5ab-33b^2)^m:(2a+3b)^m$; 6) $(a^3+b^3)^m:(a^2-ab+b^2)^m$;

7) $\left(\frac{x+y}{a+b}\right)^2\cdot\frac{(x+y)^4}{(a+b)^2}\cdot\left[\frac{a+b}{x+y}\right]^5$; 8) $\frac{(15x^2+11xy-14y^2)^2}{3x-2y}:\left[\frac{3x-2y}{5x+7y}\right]^2$.

**VI. Aşağıdaki toplamlarda paydaları eşit kılınız ve sonucu mümkün olduğu kadar sadeleştiriniz.**

1) $\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}$; 2) $\frac{1-2x}{x^3}+\frac{2}{x^2}$; 3) $-\frac{1}{x^{n-2}}-\frac{1-x}{x^{n-1}}+\frac{1+x}{x^n}$;

4) $\frac{1-2x^2}{x^m}+\frac{2-3x^2}{x^{m-2}}+\frac{3}{x^{m-4}}$; 5) $\frac{y^2}{(x-y)^m}+\frac{x}{(x-y)^{m-1}}-\frac{1}{(x-y)^{m-2}}$;

6) $\frac{x^m+y^n}{x^m-y^n}-\frac{x^m-y^n}{x^m+y^n}$; 7) $\frac{a}{x^ny}+\frac{b}{x^{n-1}y^2}-\frac{b}{x^2y^{n-1}}+\frac{d}{xy^n}$.

**VII. Aşağıdaki kuvvete yükseltme işlemlerini yapınız:**

1) $(2^2)^3$; 2) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3$; 3) $(a^{-2})^3$; 4) $(a^{-3})^{-5}$; 5) $(a^{-2})^0$; 6) $(a^2)^m$;

7) $(a^m)^x$; 8) $(a^{-3})^{-2m}$; 9) $[(-a)^{-2m}]^{-3}$; 10) $(4ab^2c^3)^2$; 11) $(-a^{2m-1})^3$;

12) $\frac{(m^3)^5\cdot(n^4)^2}{(m^2n^5)^2}$; 13) $\left[\frac{x^n}{y^c}\right]^4\cdot\left[\frac{y^c}{x^n}\right]^2$; 14) $\left[\frac{m^2n^5z^7}{a^{11}b^9}\right]^{-2}$;

15) $\left[\frac{a^{-3}a^2c}{x^2y^2z^{-1}}\right]^{-3}$; 16) $b^{29}\left[\left[\frac{c^3}{a^2b^2}\right]^2\right]^3+\left[\left[\frac{c^{-4}}{ab^2}\right]^2\right]^2$.

## *İKİNCİ BÖLÜM*

### 4. KÖKLÜ KEMİYETLER

1. KÖK ANLAMI. $5^2$ üslü kemiyetinin değeri, kuvvetlere ait aritmetik kaideler yardımile hesabedilir. Tabanı 5 ve üssü 2 olan bu üssü kemiyetin değeri, $5^2=5\cdot5=25$ tir. Bunun gibi $(-2)^2$; $2^2$; $(-3)^2$; $3^2$ üslü kemiyetlerinin değerleri de sırasiyle, $(-2)^2=-2\cdot(-2)=4$; $2^2=2\cdot2=4$; $(-3)^2=-3\cdot(-3)=9$; $3^2=3\cdot3=9$ dur.

Bu örneklerde, üslü kemiyetin tabanı ve üssü veriliyor, bunlar yardımiyle üslü kemiyetin değeri bulunuyor. Eğer üslü kemiyetin değeri ve üssü verilirse tabanı da bulunabilir. Meselâ; değeri 25 ve üssü 2 olan kemiyetin tabanı $\mp5$ dir. Bunun gibi değeri 8 ve üssü 3 olan kemiyetin tabanı 2 dir. Çünkü $2^3=8$ dir.

Bir üslü kemiyetin değeri ve üssü belli iken tabanını bulmaya *kök alma* denir. Tabanın arandığını belli etmek için $\sqrt{\ }$ işareti kullanılır. Genel olarak,

Bir b sayısının m ninci kuvveti bir a sayısına eşitse, b sayısına a sayısının m ninci kuvvetten kökü denir. (m tam ve pozitif bir sayıdır.) b sayısı $\sqrt[m]{a}$ semboliyle gösterilir. $b=\sqrt[m]{a}$ ve $b^m=a$ denk eşitliklerinden kuvvete yükseltme ve kök alma işlemlerinin birbirinin tersi işlemler olduğu sonucuna varılır.

Yukardaki tariften ve bu eşitliklerden a verildiğine göre, m ninci kuvvetten kökü tarif eden eşitlik,

$$\boxed{(\sqrt[m]{a})^m=a}$$ dır.

Bu eşitlikte, pozitif ve tam bir sayı olan m ye kök kuvveti veya üssü, a ya kökü alınan sayı denir. $\sqrt[m]{a}=b$ ye a nın m ninci kuvvetten kökü ve bunu bulmak için yapılan işleme de «m» ninci kuvvetten kök alma işlemi denir.

Not. 1. m çift bir sayı ise, $\sqrt[m]{a} = b$ nin gerçek olabilmesi için, a nın pozitif olması gerektir. Neden?

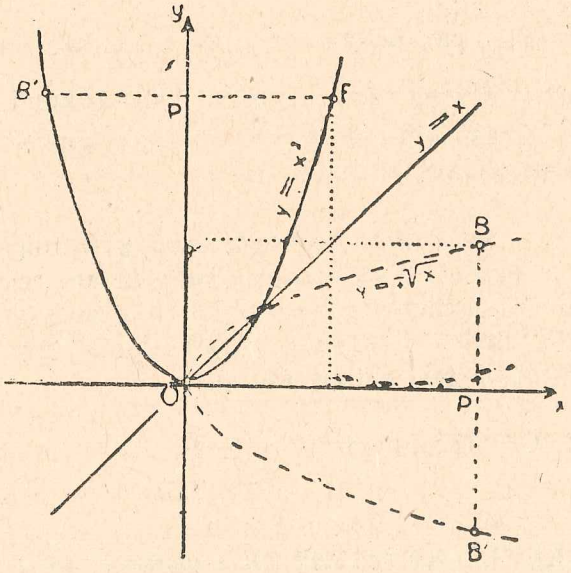
2. m çift bir sayı ve $a>0$ ise, a nın simetrik iki kökü olur ve $\mp\sqrt[m]{a} = \mp b$ şeklinde yazılır. Neden?

ÖZEL HALLER. 1. $m=2$ ise, b ye a nın kare kökü denir ve kök işaretleri üzerine 2 yazılmaz, $\sqrt{a}=b$ şeklinde yazılır.

2. $m=3$ ise, b ye anın küb kökü denir.

## 5. KÖKLÜ KEMİYETLERİN GRAFİKLE GÖSTERİLMESİ

a) $y=\sqrt{x}$ grafiği. — $y=x^2$ fonksiyonunun gösterdiği parabolün çizimi (Şek. 1) ve bu grafik yardımiye bir sayının karesinin buluşu gösterilmişti. $y=x^2$ de x in $\mp a$ gibi, mutlak değerleri ayni, işaretleri ters olan değerleri için, y değer ve işaretçe ayni bir değer aldığından, bu fonksiyonun gösterdiği parabol (Şek. 3) y eksenine göre simetriktir. Buna göre $(+a)^2$ ve $(-a)^2$ nin değerleri aynı sayıdır.




Şekil : 3

Bir a sayısının karesini ararken a sayısını apsis olarak almış ve parabolde bu apsise ait ordinatı okumakla sayının karesini bulmuştuk. Dikkat edilirse, burada x veriliyor, y bulunuyor demektir. Bu parabolde, y verilirse x de bulunabilir. Meselâ $y=b$ iken x 'ı (yani $\sqrt{b}$ yi) hesabedelim. Bunun için y ekseni üzerinde, yukarıya

doğru, $\overline{OP}=b$ olmak üzere bir P noktası alınır; bu noktadan x eksenine çizilen paralelin parabolü kestiği noktaların (B ve B') apsisleri, aranılan x (yani $\sqrt{b}$ nin) ın değerleridir. Böylece elde edilen noktaların ayırdığı parçalar arasında daima $\overline{OP}=\overline{PB}^2$ eşitliği vardır. Bu eşitlik, şekilde de kolayca görüleceği üzere, $y=x^2$ eşitliğinin aynıdır. x eksenine çizilen paralel doğru, parabolü iki noktada kestiğinden, b nin kare kökünün, mutlak değerleri ayni işaretleri ters iki değeri, $\mp\sqrt{b}$ vardır. Şu halde, $y=x^2$ parabolü, bir sayının kare kökünü grafik yolu ile bulmak için de kullanılabilir.

$y=x$ doğrusu çizilir ; bu doğruya göre parabolün simetriği şekilde noktalı olarak çizilmiştir. Simetri, uzunlukları değiştirmeyeceğinden, son durumda da parabolün her noktası için, $\overline{OP}=\overline{PB}^2$ eşitliği vardır. Yeni durumda parabolün ekseni Ox olduğundan $\overline{OP}$ yerine x, $\overline{PB}$ yerine y yazılacak olursa, noktalı çizili parabolü gösteren $y^2=x$ fonksiyonu veya buradan $y=\mp\sqrt{x}$ bulunur. O halde,

Noktalı çizilen parabol $y=\mp\sqrt{x}$ köklü fonksiyonunun grafiğidir.

Buna göre, verilen bir b sayısının kare kökünü bulmak için, b sayısı apsis olarak alınır ve $y=\mp\sqrt{x}$ grafiğinde bu apsise ait ordinat, istenilen kare köktür.

NOT. 1. $-y=\mp\sqrt{x}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin bütün noktalarının y ekseninin sağ yanında buluşundan, negatif bir sayının kare kökünün alınamıyacağı ve eğrinin x eksenine göre simetrik oluğundan da pozitif bir sayının kare kökünün, mutlak derece eşit işaretçe ters iki değeri olduğu anlaşılır.

ÖDFV : Grafik yolu ile $\sqrt{3}$ ; $\sqrt{4}$ ; $\sqrt{9}$ u hesabediniz.

## 6. KÖKLÜ KEMİYETLER ÜZERİNE İŞLEMLER

**Teorem. — Köklü bir kemiyetin, kök kuvveti ile üssü ayni bir tamsayı ile çarpılır veya bölünürse, köklü kemiyetin değeri değişmez.**

(I) $$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$$

**İspatı:** Bu eşitliği ispat etmek için, her iki yanın «m p» yinci kuvvetlerinin eşit olduğu, yani:

$$(\sqrt[mp]{a^{np}})^{mp} = (\sqrt[m]{a^n})^{mp}$$

gösterilmelidir. Gerçekten, köklü kemiyet tarifinden,

$(\sqrt[mp]{a^{np}})^{mp} = a^{np}$ ve,

$(\sqrt[m]{a^n})^{mp} = [(\sqrt[m]{a^n})^m]^p = (a^n)^p = a^{np}$ olur.

Bu bağıntılarda sağ yanlar eşit olduğundan sol yanlar da eşit olur ve böylece (1) eşitliği ispat edilmiş bulunur.

ÖRNEK: $\sqrt{3} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9}$

UYGULAMA. — **Köklü kemiyetlerin sadeleştirilmesi.**

Köklü bir kemiyetin kök kuvveti ve üssü, bunların en büyük ortak böleniyle bölünmek suretiyle köklü kemiyet, ekseriya, sade bir şekle sokulabilir:

ÖRNEKLER:

1) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$; 3) $\sqrt[3]{a^9} = a^3$

Genel olarak,

$m \cdot p = q$ ise, $\sqrt[m]{a^q} = \sqrt[m]{a^{mp}} = a^p$ dır.

**Köklü kemiyetlerde kök kuvvetlerinin eşit kılınması.**

ÖRNEK: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[12]{a^5}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt{a^7}$

köklü kemiyetlerini ayni kök kuvvetli kemiyetler haline getirelim. Kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı 12 dir. Kök kuvvetleri, sırasiyle 12 ile bölünür; böylece elde edilecek, 4, 1, 3, 6 sayıları ait oldukları köklü kemiyetin kök kuvveti ve kökü alınan sayının üssiyle çarpılırsa;

$\sqrt[12]{2^4}$, $\sqrt[12]{a^5}$, $\sqrt[12]{a^9}$, $\sqrt[12]{a^{42}}$ olur.

Bu suretle ayni kök kuvvetli ve karşılık olarak öncekilerine eşit köklü kemiyetler elde edilir.

**Teorem. — Bir çarpımın m ninci kuvvetten kökü, çarpanların ayrı ayrı m ninci kuvvetten kökleri çarpımına eşittir.**

$$\boxed{\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}} \quad \text{olmalıdır.}$$

İspatı :

(II) nin her iki yanını, ayrı ayrı, m ninci kuvvete yükseltelim. Köklü kemiyet tarifinden,

$$(\sqrt[m]{ab})^m = ab$$

ve üslü kemiyetler teorisinden de,

$$(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m = ab \qquad \text{olur.}$$

Bu bağıntılarda sağ yanların eşitliğinden sol yanlar da eşit olur ve böylece (II) eşitliği ispat edilmiş bulunur.

NOT. — Kök kuvvetleri aynı değilse, köklü kemiyetlerin kök kuvvetleri eşit kılındıktan sonra (II) bağıntısı uygulanır.

ÖRNEKLER :

1) $\sqrt[12]{3^8} \cdot \sqrt[5]{4^7} = \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[5]{4^7} = \sqrt[15]{3^{10}} \cdot \sqrt[15]{4^{21}} = \sqrt[10]{3^{10} \cdot 4^{21}}$

2) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[mn]{a^n} \cdot \sqrt[mn]{b^{pm}} = \sqrt[mn]{a^n \cdot b^{pm}}.$

**ÖZEL HAL. — Çarpan halinde bulunan pozitif bir sayının kök içine alınması veya içinden dışarıya çıkarılması :**

Verilen çarpım $a \cdot \sqrt[m]{b}$ olsun. a sayısı m ninci kuvvete yükseltilerek kök içine alınabilir. Gerçekten,

$$a \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b} \qquad \text{olur.}$$

Tersine olarak, bir çarpanı kök dışına çıkartmak için, üs kök üssiyle bölünür (burada $a>0$ dır).

ÖRNEKLER :

1) $\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = 3 \cdot \sqrt{7}$

2) $\sqrt[m]{a^{mp} \cdot b^n} = \sqrt[m]{a^{mp}} \cdot \sqrt[m]{b^n} = a^p \sqrt[m]{b^n}.$

**Teorem. — Bir bölümün m ninci kuvvetten kökü, pay ve paydanın m ninci kuvvetten köklerinin bölümüne eşittir.**

(III) $$\boxed{\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}}$$ olmalıdır.

(III) ün her iki yanını ayrı ayrı ayrı m ninci kuvvete yükseltelim. Tarifden,

$$\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m = \frac{a}{b}$$

ve üslü kemiyetler teorisinden de,

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b} \qquad \text{olur.}$$

Bü bağıntılarda sağ yanların eşitliğinden sol yanlar da eşit olur. Ve böylece (III) eşitliği ispat edilmiş bnlunur.

NOT. — Pay ve paydanın kök kuvvetleri ayni değilse, pay ve paydanın kök kuvvetleri eşit kılındıktan sonra (III) bağıntısı uygulanır.

ÖRNEKLER :

1) $\dfrac{\sqrt{27}}{3} = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\dfrac{27}{9}} = \sqrt{3}$ ,

1) $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{\sqrt[mn]{a^n}}{\sqrt[mn]{b^m}} = \sqrt[mn]{\dfrac{a^n}{b^m}}$ .

**1. Köklü kemiyetleri toplama, çıkarma, çarpma ve bölme üzerine;**

**a) Çözülmüş örnekler:**

1) $4.\sqrt{3}+6.\sqrt{3} = (4+6).\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ ;

2) $(4\sqrt{a})^2-(3\sqrt{b})^2+(2\sqrt{7b-4a})^2-(6\sqrt{b})^2$

$=16a-9b+4(7b-4a)-36b=-17b$;

3) $\sqrt[5]{(112)^2}.\sqrt[5]{(112)^3}+\sqrt[17]{(217)^9}.\sqrt[17]{(217)^{-2}}.\sqrt[17]{(217)^{10}}=\sqrt[5]{(112)^2.(112)^3}$

$+\sqrt[17]{(217)^9.(217)^{-2}.(217)^{10}}=\sqrt[5]{(112)^5}.\sqrt[17]{(217)^{17}}=112.217$ ;

4) $\sqrt[3]{\dfrac{a+b}{a-b}}.\sqrt[3]{\dfrac{a^2-b^3}{a^2+ab+b^2}}.\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}=\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)^3(a^3-b^3)}{(a^3-b^3)}}=a+b;$

5) $\sqrt[x+y]{a^{4x+4y}.b^{5x+5y}}-\sqrt[x-y]{a^{7x-7y}.b^{6x-6y}}=$

$\sqrt[x+y]{a^{4(x+y)}.b^{5(x+y)}}-\sqrt[x-y]{a^{7(x-y)}.b^{6(x-y)}}=a^4b^5-a^7b^6=a^4b^5(1-a^3b)$;

6) $\sqrt[3]{125x^4y^4z}-\sqrt[3]{216xy^4z^4}-2.\sqrt[3]{64x^4yz^4}=5xy\sqrt[3]{xyz}$ ;

$-6yz\sqrt[3]{xyz}-8xz\sqrt[3]{xyz}=(5xy-6yz-8xz)\sqrt[3]{xyz}$ ;

**Ödevler:**

1) $\sqrt[3]{4^3}$; 2) $\sqrt[4]{16^4}$; 3) $(\sqrt{9})^2$; 4) $(\sqrt[3]{125})$;
5) $\sqrt{a^2}$; 6) $a\sqrt[3]{a^3}$; 7) $\sqrt{b^6}$; 8) $\sqrt[5]{y^{20}}$;
9) $\sqrt{(x^2)^2}$; 10) $(2\sqrt{7})^2$; 11) $\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}$; 12) $(2\sqrt{a})^2$;
13) $(5\sqrt{x})^2$; 14) $(a\sqrt{b})^2$; 15) $(x\sqrt[3]{x})^2$; 16) $(2\sqrt[4]{a^3})^4$.

**Aşağıdaki toplama ve çıkarma halinde bulunan, köklü kemiyetleri sadeleştiriniz.**

1) $\sqrt{2}+3\sqrt{2}$; 2) $4\sqrt{5}-3\sqrt{5}$; 3) $5\sqrt{7^2}-3\sqrt{7^2}$;
4) $\sqrt{a}+2\sqrt{a}$; 5) $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}$;
6) $6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
7) $2\sqrt{a}+\left(\sqrt{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}\right)^2+4\sqrt{b}$;
8) $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}$;
9) $\sqrt{45c^3}-\sqrt{80c^3}+\sqrt{5a^2c}$; 10) $\sqrt{4a^5b^2-20a^3b^3+25ab^4}$;

**II. Aşağıdaki ödevlerde, kök içindeki ifadeleri tam kare haline getiriniz ve sonra kökten kurtarınız:**

1) $\sqrt{4a^2+4ab+b^2}$; 2) $\sqrt{x^2-10xy+25y^2}$; 3) $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}$;
4) $\sqrt{x^{2m}+2x^my^n+y^{2n}}$; 5) $\sqrt{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-2}$;

**III. Aşağıdaki köklü kemiyetleri kısaltınız:**

1) $6.\sqrt[3]{24}+8\sqrt[3]{81}+10\sqrt[3]{192}$;
2) $\sqrt{49\,m^2}+\sqrt{64\,n^2}+\sqrt{81\,x^2}+\sqrt{100\,y^2}$;
3) $\sqrt{x^6a^2-x^6b^2-x^6c^2}-\sqrt{[y^3\sqrt{(a+b)(a-b)}+c]}\cdot\sqrt{[y^5\sqrt{(a+b)(a-b)}-c]}$
4) $\sqrt[3]{(m-n)^6x^4}-\sqrt{(m+n)^4x^2}+\sqrt[3]{(m^2+n^2)^3x^4}-\sqrt{(n^2-m^2)^2x^3}$;
5) $2.\sqrt{(x+y)a^2}.\sqrt{b^2(x-y)}+\sqrt{a^4(x^2-y^2)}$;
6) $\sqrt[4]{x^{-12}b^8}+\sqrt{x^6a^{-2}}-\sqrt[3]{x^9b^6}-\sqrt[5]{x^{-15}a^{-5}}$;
7) $\sqrt[3]{2.729x^4y^7z}-\sqrt[3]{16x^4yz^7}+\sqrt[3]{432x^7y^4z}$;
8) $\sqrt[x]{a^{x+1}b^xc}-\frac{1}{c}\sqrt[x]{ab^{x+1}c^x}+\frac{1}{ab}\sqrt[x]{a^xbc^{x+1}}$;

9) $2\sqrt{20} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{80}{9}} + \frac{3}{7} \cdot \sqrt{\frac{245}{16}}$ ;

10) $3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{\frac{123}{25} - 3} - 2 \cdot \sqrt{432}$ ;

**IV. Aşağıdaki köklü kemiyetlerin çarpımlarını sadeleştiriniz:**

1) $(\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50})\sqrt{2}$ ; 2) $(\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{54}+\sqrt{216}) \cdot \sqrt{3}$ ;

3) $\sqrt[7]{2x} \cdot \sqrt[7]{4x^2} \cdot \sqrt[7]{2x}$ ; 4) $\sqrt{9(a^3+b^2a)} \cdot \sqrt{81(b^3-a^2b)}$ ;

5) $(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$ ; 6) $(6+12\sqrt{7}) \cdot (3-5\sqrt{7})$ ;

7) $(9+2\sqrt{10})(9-2\sqrt{10})$ ; 8) $(2\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{2}-\sqrt{3})$ ;

9) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$ ; 10) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$ ;

11) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$ ; 12) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$ ;

13) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$ ; 14) $(\sqrt{m-n}+m)(\sqrt{m-n}-m)$ ;

15) $(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}) \cdot (\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b})$ ;

**V. Aşağıdaki çarpım halinde bulunan, kemiyetleri bir kök içinde yazınız ve mümkün olduğu kadar sadeleştiriniz:**

1) $4\sqrt{5}$ ; 2) $3.\sqrt{\frac{1}{9}}$ ; 3) $\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{2^2}$ ; 4) $b\sqrt{a}$ ; 5) $\sqrt[2]{(x^8y)^2} \cdot \sqrt[3]{x^{-4}y^2}$ ;

6) $(x^2-y^2)\sqrt{\frac{(x-y)^3}{(x+y)^5}}$ 7) $\sqrt[3]{ax-bx} \cdot \sqrt[3]{a^2x^2+abx^2+b^2x^2}$ ;

8) $\sqrt[3]{(a-b)^2 \cdot x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{(a^2-b^2)^5}}$ ; 9) $\sqrt{c(a^2-b^2)} \cdot \sqrt{\frac{d^2(a+b)}{c^3(a-b)^3}}$

10) $\sqrt{\frac{a^2+a-6}{18a-54}} \cdot \sqrt{\frac{a^2-5a+6}{2}}$ ;

11) $\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a+n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{c^3}{a+b}}$ ;

12) $(m^2-n^2) \cdot \sqrt{\frac{(m+n)(m^2+2mn+n^2)}{(m-n)(m+n)}}$ ;

13) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt[m]{(a-b)^p} \cdot \sqrt[n]{(x+y)^2}$ ; 14) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt[4]{3}$ .

**VI. Aşağıdaki iki ifadenin karesini bulunuz.**

1) $\sqrt{5+11\sqrt{3}}-2+\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{2}}$.

**VII. Aşağıdaki iki ifadenin kübünü bulunuz:**

1) $\sqrt[3]{ax^2}+\sqrt[3]{7}$; 2) $\sqrt[3]{m^2-n^2}-\sqrt[3]{m^2+n^2}$.

**VIII. Aşağıdaki köklü bölmeleri kısaltınız:**

1) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; 2) $\sqrt{2\frac{13}{36}}$; 3) $\sqrt[3]{2\frac{48}{8}}$; 4) $\sqrt{\frac{a^2}{100}}$; 5) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}}$

6) $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}}$: 7) $\sqrt{\frac{x^3y^2}{xy^4}}$; 8) $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3}}$; 9) $\frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{n^2}}$; 10) $\frac{\sqrt[n]{m^{5n}}}{\sqrt[n]{m^{4n}}}$

11) $\sqrt[x-1]{a^{4m+3}}:\sqrt[x-1]{a^{4mx+3}}$; 12) $\sqrt{\frac{64(m^3-n^2)(x^2+2xy+y^2)}{(m+n)^3}}$;

13) $(4\sqrt{12}-2\sqrt{48}-9\sqrt{3}+3):\sqrt{27}$; 14) $(m^2+\sqrt{m^4n^2}+\sqrt[6]{m^{12}n^{18}}):m^3$;

15) $\sqrt[x]{m^x n^{x+2}}\cdot\sqrt[x]{\frac{1}{a^{x+1}}}+\frac{3mm}{a}\sqrt[x]{\frac{n^2}{a}}-4n\sqrt[x]{\frac{n^2}{a}\left(\frac{a}{m}\right)^{-x}}$;

16) $\sqrt{\frac{m^5}{n^3}}\cdot\sqrt{n}+\sqrt{\frac{m^2}{c}}:\sqrt{\frac{c^3}{m^3}}$;

17) $\left[2x\sqrt{\frac{x}{x^2-a^2}}-\sqrt{\frac{x(x+a)}{x-a}}+\sqrt{\frac{x^2(x^2-ax)}{x+a}}\right]\cdot\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$.

**IX. Aşağıdaki köklü kemiyetleri sadeleştiriniz:**

1) $\frac{\sqrt{3x^4}}{\sqrt[3]{500a^4}}:\frac{\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt{12x^4}}$; 2) $\sqrt{\frac{4a^2+8ab+4b^2}{(a^2-b^2)^2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{4}}$;

3) $\sqrt{\frac{2(m^2+n^2)^2}{a^2}-\frac{2(m^2-n^2)^2}{a^2}}$; 4) $\sqrt{mn^2 5^3:m^3n^5\cdot 5^7}$;

5) $a:\sqrt[3]{a^2}$; 6) $\frac{\sqrt{m-n}}{m-n}$; 7) $\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}$; 8) $\sqrt{\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^2z^2}+\frac{1}{z^2y^2}}$

9) $\dfrac{\sqrt{(a^3-b^3)(a+b)^3}}{a^2-b^2}$ ;

10) $\sqrt[3]{\dfrac{3m^2n}{32x^2y}} : \dfrac{2xy^2}{9mn^2}$ ;

11) $\dfrac{\sqrt{c^3(x^2-y^2)}}{\sqrt{c(x+y)^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{P^5(x+y)}}{\sqrt{P(x-y)}}$;

12) $\left(\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right) : \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

13) $\sqrt{\dfrac{(a-b)^3}{c}} \cdot \sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{c(a^3-b^3)}}$;

14) $\dfrac{ab}{c} \cdot xy \sqrt[3]{\dfrac{a^{-2}b^{-2}}{x^2y^2}} \cdot c^{-4}$

15) $\dfrac{xy}{z} \sqrt[4]{\dfrac{x.t^6.y^3}{z^4}} + \dfrac{ty}{z^2} \sqrt[4]{x^5.t^2.y^3}$:

16) $\dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{xy}} \sqrt{x^{-1}y^{-1}} + x \sqrt[3]{x^{-3}}$ .

**Teorem. — Köklü bir kemiyeti herhangi bir kuvvete yükseltmek için, kökü alınan sayı bu kuvvete yükseltilir ve elde edilen sonucun aynı kuvvetten kökü alınır.**

(IV) $\boxed{(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}}$ olmalıdır.

Üslü kemiyetlerin tarifinden;

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[m]{a} \text{ (n tane)}$$

ve köklü kemiyetlere ait (II) bağıntısından :

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a.a...a} = \sqrt[m]{a^n}$$ bulunur.

Böylece (IV) bağıntısı ispat edilmiş olur.

ÖRNEKLER :

1) $(\sqrt[m]{a})^3 = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{a.a.a} = \sqrt[m]{a^3}$ ;

2) $(\sqrt[8]{81})^4 = \sqrt[8]{81^4} = \sqrt{81} = 9$ ; 3) $(\sqrt[12]{27})^4 = \sqrt[12]{27^4} = \sqrt[3]{27} = 3$.

**Teorem. — $\sqrt[m]{a}$ köklü kemiyetinin «p» yinci kuvvetten kökü, «a» nın «m . p» yinci kuvvetten köküne eşittir.**

(V) $\boxed{\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mp]{a}}$ olmalıdır.

(V) in her iki yanı «m . p» yinci kuvvete yükseltilirse ;

Birinci yan,

$$\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mp} = \left[\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}\right)^p\right]^m = (\sqrt[m]{a})^m = a.$$

İkinci yan,

$$(\sqrt[mp]{a})^{mp} = a \quad \text{olur.}$$

Bu bağıntılarda sağ yanların eşitliğinden sol yanlar da eşit olur ve böylece (V) bağıntısı edilmiş olur.

ÖRNEKLER:

1) $\sqrt[6]{\sqrt[7]{87}} = \sqrt[42]{87}$;  2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^8}} = \sqrt[12]{b^8} = \sqrt[3]{b^2}$.

**I. Köklü kemiyetlerin kuvvete yükseltilmesi üzerine ödevler:**

1) $(\sqrt{a^2+2ab+b^2})^3$;  2) $(a\sqrt{a})^2$;  3) $(2\sqrt{a})^3$;

4) $(\sqrt{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3})^4$;  5) $\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2} + \sqrt[4]{\left(\frac{1}{a^4}\right)}$

6) $(\sqrt[3]{x^2y})^4 \cdot (\sqrt[3]{xy^2})^2$;  7) $(\sqrt[5]{2x^4y^3})^4$;  $(\sqrt[5]{4x^2y^4})^3$;

8) $\sqrt[2a+3]{\left[\frac{x^{4a+6}}{y^{6a+9}}\right]^2} - \sqrt[a+2]{\left[\frac{x^{2a+4}}{y^{3a+6}}\right]^3}$.

**II. Köklü kemiyetlerin kökü üzerine ödevler:**

1) $\sqrt{\sqrt{16}}$;  2) $\sqrt{\sqrt[5]{3^{10}}}$;  3) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^8}}}$;  4) $\sqrt[7]{\sqrt{128m^{14a}n^{28b}z^{42c}}}$;

5) $\sqrt{m^3\sqrt{n}}$;  6) $\sqrt[5]{(m-n)^2\sqrt{m-n}}$;  7) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$;

8) $\sqrt[3]{a.\sqrt{a^2}.\sqrt[3]{a^{12}}}$;  9) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{8a^3}}$;  10) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5$

11) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16a^{12x}b^{24y}c^{48x}}}$;  12) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{1000a^{3m}.b^{9m}}}$;  13) $\sqrt[3]{\sqrt{125m^{6x}.n^{3y}}}$;

14) $\sqrt{\sqrt[6]{1024y^{15}z^8}}$;  15) $\sqrt[9]{\sqrt[4]{b^7}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[12]{b^{13}}}$;

16) $\sqrt[9]{\sqrt[5]{a^{11}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[15]{a^{19}}} : \sqrt[3]{a}$;  17) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{\frac{b^{2x}.a^{y-3}}{b^{x-y}}}} \cdot \sqrt[12]{\sqrt{\frac{a^{11y+3}.b^{10x}}{c^{23x+y}}}}$;

18) $x\sqrt[x]{x.\sqrt{x^{1-a^2}}}$;

**Tarif.** — $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ve $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ şeklinde, terimlerinden yalnız birinin işareti farklı olan ifadelere Eşlenik'dirler denir.

**Bir kesirin irrasyonel paydasını rasyonel kılmak.** — Genel olarak, paydası irrasyonel olan bir kesiri, değeri değişmeksizin, paydası rasyonel bir kesire çevirmek faydalıdır. Bu çevirmeleri yapabilmek için kullanılan bazı önemli özdeşlikleri hatırlatalım;

(1) $(a+b)(a-b)\equiv a^2-b^2$ veya,

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})\equiv(a-b)$$

(2) $(a+b)(a+b)(a^2-ab+b^2)\equiv a^2+b^3$ veya,

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})\equiv(a+b)$$

(3) $(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv a^3-b^3$ veya,

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\equiv(a-b)$$

**3. İrrasyonel paydalı kesirlerin paydalarını rasyonel kılma üzerine,**

**a) Çözülmü örnekler :**

1) $\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{R\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}R}{3}$ 2) $\dfrac{m}{\sqrt{A}}=\dfrac{m\sqrt{A}}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{A}}=\dfrac{m\sqrt{A}}{A}$ ;

3) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2-6}=$

$-\dfrac{3}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})=\dfrac{3}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ;

4) $\dfrac{m}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{m(\sqrt{A}\pm\sqrt{B})}{(\sqrt{A}\pm\sqrt{B})(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}=\dfrac{m\sqrt{A}\pm\sqrt{B})}{A-B}$ ;

5) $\dfrac{1}{2-3\sqrt{5}}=\dfrac{2+3\sqrt{5}}{(2-3\sqrt{5})(2+3\sqrt{5})}=\dfrac{2+3\sqrt{5}}{4-45}=-\dfrac{2+3\sqrt{5}}{41}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{5}}=$

$$\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{5}}{[(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}][(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{5}]}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2-2\sqrt{6}+3-5}=$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})\sqrt{6}}{12}.$$

b) **Ödevler:**

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$; 3) $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{a^2b^2}{\sqrt{ab}}$; 5) $\frac{a^{1+y}}{\sqrt{a^{1+y}}}$;

6) $\frac{3-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; 8) $\frac{m^{x-y}}{\sqrt[3]{m^{2y-2x}}}$; 9) $\frac{1}{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$;

10) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; 12) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

13) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; 14) $\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$; 15) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$.

**4. Kesirli üsler.**

1°. m; n ile bölünebiliyorsa $m=n.p$ (1) olabileceğinden,

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{np}}=a^p$ yazılabilir. (1) eşitliğinden $p=\frac{m}{n}$ elde edilir ve,

$$\sqrt[n]{a^m}=a^p=a^{\frac{m}{n}} \quad \text{olur.}$$

2°. m; n ile bölünemiyorsa, $\frac{m}{n}$ kesirli bir sayıdır. Ve bu halde $a^{\frac{m}{n}}$ bir anlam taşımaz (üslü kemiyetler tarifine göre). Bnnunla beraber; TARİF olarak,

m ve n sayıları tam ve pozitif olmak üzere, ne olursa olsunlar «$a^{\frac{m}{n}}$» gösteriminin «$\sqrt[n]{a^m}$» ile ayni değerli olduğu kabul olunur. Bu tarife göre,

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}} \quad \text{dır.}$$

NOT. — 1. $\frac{m}{n}$ kesiri yerine, değerce eşit başka bir kesir konulursa,

$a^{\frac{m}{n}}$ kemiyetinin değeri değişmez.

$\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ ise $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}$ dür.

Tarifden,

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ve $a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}}$ yazılabilir. Sağ yanlar ayni kök kuvvetli yapılırsa,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nn']{a^{mn'}},$$

$$a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[nn']{a^{m'n}} \quad \text{olur.}$$

$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ olduğundan, bu eşitliklerin sağ yanlarının eşiliği kolayca görülür. O halde, sol yanları da eşit olur.

2. Üssün kesirli olması halinde de, tam üslü kemiyetlere ait bütün formüller doğrudur.

1°. $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{p'}{m'}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{p'}{m'}}$ dır.

Tarifden,

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{p'}{m'}} = \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[m']{a^{p'}} = \sqrt[mm']{a^{pm'}} \cdot \sqrt[mm']{a^{p'm}}.$$

Buradan,

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{p'}{m'}} = \sqrt[mm']{a^{pm'} \cdot a^{p'm}} = \sqrt[mm']{a^{pm'+p'm}} = a^{\frac{pm'+p'm}{mm'}}$$

ve

(1) $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{p'}{m'}} = a^{\frac{p'm+p'm}{mm'}} = a^{\frac{p}{m'}+\frac{p'}{m'}}$ olur.

2°. $\dfrac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{p'}{m'}}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{p'}{m'}}$ $\left(\frac{p}{m} > \frac{p'}{m'} \text{ ise}\right)$ dır.

$$\frac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{p'}{m'}}} = \frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[m']{a^{p'}}} = \frac{\sqrt[mm']{a^{pm''}}}{\sqrt[mm']{a^{p'm}}} = \sqrt[mm']{\frac{a^{pm'}}{a^{pm'}}} = \sqrt[mm']{a^{pm'-p'm}} =$$

(2) $a^{\frac{pm'-p'm}{mm'}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{p'}{m'}}$ olur.

3°. $(abc)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} . b^{\frac{p}{m}} .. c^{\frac{p}{m}}$ dır.

$(abc)^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{(abc)^p} = \sqrt[m]{a^p b^p c^p} = \sqrt[m]{a^p} . \sqrt[m]{b^p} . \sqrt[m]{c^p} = a^{\frac{p}{m}} . b^{\frac{p}{m}} . c^{\frac{p}{m}}$,

buradan,

(3) $(abc)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} . b^{\frac{p}{m}} . c^{\frac{p}{m}}$ olur.

(4°.) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}$ dir.

Tarifden, $\left[\frac{a}{b}\right]^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{\left[\frac{a}{b}\right]^p} = \sqrt[m]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[m]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}$.

buradan,

(4) $\left[\frac{a}{b}\right]^{\frac{p}{m}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}$ olur.

(5) $\left[a^{\frac{p}{m}}\right]^{\frac{p'}{m'}} = a^{\frac{pp'}{mm'}}$ dır.

Tarifden,

$$\left[a^{\frac{p}{m}}\right]^{\frac{p'}{m'}} = \sqrt[m']{\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{p'}} = \sqrt[m']{\left[\sqrt[m]{a^p}\right]^{p'}} = \sqrt[m']{\sqrt[m]{a^{pp'}}} = \sqrt[mm']{a^{pp'}} = a^{\frac{pp'}{mm'}}$$

burrdan

(5) $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{p'}{m'}} = a^{\frac{pp'}{mm'}}$ olur.

3. Üssü kesirli kemiyetlerde gösterilen bu formüller, üslerin negatif olmaları halinde de doğrudurlar.

**5. Üssü kesirli kemiyetler üzerine,**

**a) Çözülmüş örnekler:**

1) $36^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(36)^3} = \sqrt{(6^2)^3} = 6^3 = 216$;  2) $4^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{7}{2}}} =$

$\frac{1}{\sqrt{4^7}} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$; 3) $9^{-0,5} = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$;

4) $(125)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$; 5) $\left[1\frac{3}{4}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{8}{11}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot (11)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{2}{7}\right]^{\frac{7}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{7.8.11.2^7}{4.11.7^7}} = \frac{2^4}{7^3} = \frac{16}{343}$; 6) $a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{7}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = a^{\frac{35-4-10}{20}}$

$= a^{\frac{21}{20}} = a^{1+\frac{1}{20}} = a^{20}\sqrt{a}$; 7) $\sqrt[a-1]{x^{a^2-1}} = x^{\frac{a^2}{a-1}} = x^{a+1}$;

8) $\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}} = \sqrt{a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}} + \sqrt{b^2 + b^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}}}$

$= \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\left[a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right]} + \sqrt{b^{\frac{4}{3}}\left[a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right]} = \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\sqrt{a^{\frac{4}{3}}} + \sqrt{b^{\frac{4}{3}}}\right)$

$= \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

**b) Ödevler :**

1) $64^{\frac{4}{6}}$; 2) $125^{-\frac{1}{3}}$; 3) $\left[a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}\right]\left[a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right] \cdot$

$\left[a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}\right]\left[a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right]$ çarpımını yapınız.

4) $\frac{x+\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{x-\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x-\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{x+\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}$; 5) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}^3 \cdot \sqrt[6]{\sqrt{a^9}}}$;

6) $\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$; 7) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} + 1}{x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{8}} + 1}$;

8) $\left(2^{\frac{1}{4}}a + 3^{\frac{1}{4}}b\right)\left(3^{\frac{1}{4}}a - 2^{\frac{1}{4}}b\right) - 6^{\frac{1}{4}}(a^2-b^2) + 2^{\frac{1}{2}}ab$;

9) $\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x - x^{\frac{1}{2}} + 1\right)$;

10) $\frac{a^2 - a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}$; 11) $\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}}$.

**6) Köklü kemiyetler üzerine karışık ödevler:**

1) $(b\sqrt{3})^2$; 2) $(2\sqrt{a})^3$; 3) $\sqrt[3]{27\sqrt{5}}$; 4) $\sqrt{a^7\sqrt{b}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{\frac{x}{2}}}$ ; 6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{8a^3}}\right)^7$ ;

7) $2.\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}}+3.\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}}-3.\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}}-\sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}$ ;

8) $\sqrt[2m]{\sqrt[3n]{a^5}}.\sqrt[6m]{\sqrt[n]{a^3}}.\sqrt[6n]{\sqrt[m]{a}}.\sqrt[m]{\sqrt[6n]{a^9}}$ ;

9) $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$ ; 10) $\sqrt[n-1]{\frac{a}{\sqrt[n]{a}}}$ ; 11) $\sqrt[2m+3n]{\frac{v^{8m}\cdot v^{11n}}{v^{2n}\cdot v^{2m}}}$ ;

12) $\sqrt[x-y]{c^{x^2-2xy+y^2}}$ ; 13) $\frac{2(2+\sqrt{3})}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}+\frac{2(2-\sqrt{3})}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ ;

14) $\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ; 15) $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ .

16) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ verildiğine göre, $x^2+y^2+3x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\equiv a^2$ olduğunu gösteriniz.

17) $\left(\frac{a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\equiv(a+b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

18) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\equiv\sqrt{a-\sqrt{b}}$.

(2 ve 3 özdeşliklerinde a, b ve $a^2-b$) pozitiftirler).

## 7. KARE KÖK ALMA

**1. Kare kök alma.** — I. Hal. — Verilen sayı 100 den küçük olsun. İlk 10 sayının karelerini düşünelim:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kare kökler | : | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10 |
| Sayılar | : | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81, | 100 |

Birinci sıradaki sayılar, ikinci sıradaki sayıların kare kökleri oldukları gibi, bu sayılar arasındaki sayıların da kare köklerinin tamsayı kısmıdırlar.

II. Hal. — Verilen sayı 100 den büyük ve 10000 den küçük olsun (sayı 3 veya 4 rakamlı demektir).

4225 sayısının kare kökünü alalım. Bu sayı 100 ile 10000 arasında bulunduğundan, kare kökü de bu sayıların kare kökleri olan 10 ve 100 sayıları arasındadır. O halde aranılan kare kök iki rakamlıdır. Bilindiği üzere iki rakamlı bir sayı $10a+b$ şeklinde gösterilebilir.

$$4225=(10a+b)^2=100a^2+(20a+b)\cdot b=42\cdot 100+25.$$

Burada $a^2=42$ demektir.

| | | |
|---|---|---|
| 42 25<br>36 | 65 | $100a^2=100\cdot 6^2=3600$ |
| 6 25<br>6 25 | $6\cdot 20=120;\ \frac{625}{120}\sim 5=b;$ | $(20a+b)\cdot b=(20.6+5)\cdot 5=625$ |
| 0 | $120+5$<br>$5$<br>$625$ | |

O halde,

$$\sqrt{4225}=65 \quad \text{dir.}$$

1225 sayısının kare kökünü aynı düşünüşle alalım:

| | | |
|---|---|---|
| 12 25<br>9 | 65 | $100a^2=100\cdot 3^2=900$ |
| 3 25<br>3 25 | $3\cdot 2=6,\ \frac{32}{6}\sim 5=b$ | |
| 0 | $60+5$<br>$5$<br>$325$ | $(20a+b)\cdot b=(20.3+5)\cdot 5=325$ |

III. Hal. — Verilen sayı 10000 ile 1000000 arasında olsun. (Sayı 5 veya 6 rakamlı demektir). Verilen sayının kare kökü, 10000 ve 1000000 sayılarının kare kökleri olan 100 ve 1000 sayılarının arasında bulunacağından üç rakamlıdır. Üç rakamlı bir sayı $100a+10b+c$ şeklinde gösterilebilir.

11 90 25 sayısının kare kökünü alalım.

$$11\ 90\ 25=(100a+10b+c)^2=10000a^2+(20a+b)\cdot b\cdot 100+$$
$$[20\,(10a+b)\cdot b+c]\,c=11\cdot 10000+90\cdot 100+25$$

Burada $a^2=11$ demektir.

| | |
|---|---|
| 11 90 25 | 345 |
| 9 | |
| 290 | $3\cdot2=6,\ \frac{29}{6}\sim 4$ |
| 256 | |
| 3425 | $60+4$ \| $2\cdot34=68,\ \frac{342}{68}\sim 5$ |
| 3425 | $4$ \| |
| 0 | $256$ \| $(20\cdot34+5)\cdot5=685\cdot5=3425$ |

ÖZEL HALLER. –

**1. Verilen sayının kare kökü tamsayı olmıyabilir.**

Meselâ 3 45 67 sayısının kare kökünü alım:

| | |
|---|---|
| 3 45 67 | 185,6 |
| 1 | |
| 245 | $2\cdot1=2,\ \frac{24}{2}\sim 8$ (kalan terimler de gözönünde tutularak) |
| 224 | |
| 2167 | $20+8$ \| $2\cdot18=36,\ \frac{216}{39}\sim 5$ |
| 1825 | $8$ \| |
| 34200 | $224$ \| $(36\cdot10+5)\cdot5=365\cdot5=1825$ |
| 33381 | \| $2\cdot185=370,\ \frac{3420}{370}\sim 9$ |
| 819 | \| $(370\cdot10+9)=3709\cdot9=33381$ |

Kalan 819 sayısının önüne yeniden iki sıfır konarak ayni şekilde devam edilebilir.

**2. Verilen sayı ondalık kesir halinde olabilir.**

Meselâ, 42,25 sayısının kare kökünü alalım.

$42,25=\frac{4225}{100}$ olduğu düşünülürse:

$$\sqrt{12,25}=\frac{\sqrt{4225}}{\sqrt{100}}=\frac{65}{10}=6,5 \quad \text{tır.}$$

54,1696 sayısının da, aynı düşünüşle, kare kökünü alalım.

$54{,}1696 = \frac{541696}{10000}$ den,

$$\sqrt{54{,}1696} = \frac{\sqrt{541696}}{\sqrt{10000}} = \frac{736}{100} = 7{,}36 \quad \text{dır.}$$

Bu iki örnekten özet olarak denilebilirki ki:

1°. Ondalık bir sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısı çift se; virgül yokmuş gibi sayının kare kökü alınır; bulunan sayı, sağdan itibaren, kare kökü alınan sayıdaki ondalık basamakların sayısının yarısı kadar sayılarak, virgülle ayrılır.

2°. Ondalık bir sayıda virgülden sonra gelen rakam sayısı tekse sayının önüne bir sıfır konur ve bir önceki metot uygulanır.

4,305 sayısının kare kökünü alalım. Önüne bir sıfır konulursa 4,3050 olur. 4,3050 sayısının kare kökü ise $\sqrt{43050} \sim 207$ dir. 4,3050 sayısında virgülden sonraki rakam sayısı dört olduğuna göre, 207 sayısında sağdan itibaren ikinci basamaktan sonra virgül konur.

O halde,

$$\sqrt{4{,}305} \sim 2{,}07 \quad \text{dir.}$$

**2. Kare kök alma üzerine ödevler;**

**I. Aşağıdaki sayıların kare köklerini alınız:**

1) 576; 2) 1453; 3) 1914; 4) 1071 ; 5) 1923;

6) 19372; 7) 23456; 8) 54,36; 9) 225,81; 10) 0,8215;

11) 1950,091; 12) 7,324.

**II. Aşağıdaki problemleri çözünüz:**

1) Bir karenin alanı 323,16 $cm^2$ dir. Bir kenarının uzunluğu nedir?

2) Alanı $93{,}721 \cdot \sqrt{3}$ $cm^2$ olan bir eşkener üçgenin bir kenarı ne uzunluktadır?

3) Dik kenarlarının uzunluğu b=25,2 cm, c=1,2445 cm olan bir dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğunu hesap ediniz.

4) Hipotenüsü 73,2 cm, bir dik kenarı b=49 cm olan bir dik üçgenin diğer dik kenarının uzunluğunu hesap ediniz.

## *ÜÇÜNCÜ BÖLÜM*

## LOGARİTMA ANLAMI

**1. Lagaritma tarifi :** Birinci bölümde, yükseltme işleminde, 2 nin 5 inci kuvveti hesap edilmiş ve $2^5=32$ bulunmuştu. Burada taban ve üs yeriliyor, üslü kemiyetin değeri araştırılıyordu. Bundan sonra ikinci bölümde, 5 inci kuvveti 32 olan sayı aranmıştı. Yani üs ve üslü kemiyetin değeri veriliyor, taban aranıyordu. Ve büylece kök anlamına varılmıştı. Aranılan bu sayı verilen 32 sayısının 5 inci kuvvetten kökü diye tarif edilmişti ve kök işleminin yapıldığı $\sqrt{\ }$ işaretiyle belirtiliyordu. $\sqrt[5]{32}=2$ şeklinde yazılıyordu.

Şimdi $2^5=32$ eşitliğinde, tabanı 2 olan üslü kemiyetin değeri 32 olduğu bilindiğine göre, üssü sorulabilir veya aranılabilir. Buna göre çözülecek problem şudur: 2 sayısı hangi kuvvete yükseltmelidir ki verilen 32 sayısı elde edilisin. Veya başka bir ifade ile, $2^x$ üslü kemiyetin değerinin 32 olabilmesi için x ne olmalıdır?

Aranılan bu üsse; 2 tabanına göre 32 sayısının logaritması denir. Bu işlemin yapıldığını; yani üssün arandığını, belirtmek üzere log işareti kullanılır. Burada üs 5 olduğuna göre, $\log_2 32=5$ şeklinde yazılır ve «2 tabanına göre 32 nin logaritması eşittir 5» diye okur.

Genel olarak, **a ve b gibi pozitif iki sayı verildiğine göre, a nın x inci kuvveti b ye eşit olacak surette bir x sayısı varsa, yani $a^x=b$ denklemini sağlayan bir x sayısı bulunabilirse (x pozitif ve negatif olabilir) bu sayıya, verilen b sayısının a tabanına göre logaritması denir ve:**

$$\log_a b=x \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

$a^x=b$ eşitliğinde x yerine eşidi yazılırsa, $a^{\log_a b}=b$ olur. Bu yazışa göre:

«Bir üslü kemiyette tabanın yükseltme kuvveti, üslü kemiyet değerinin logaritmasıdır» diye de tarif yapılabilir.

NVT. — Taban ne olursa olursa olsun, tabanın logaritması daima 1 dir. Çünkü; $a^x=a$ denklemini sağlıyan x ın değeri «1» dir.

**2. Logaritmalar üzerine ;**

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

Yukarıda gösterilen logaritma tarifine göre:

$4^2 = 16$, $2^3 = 8$, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$, $10^{-1} = 0{,}1$, $5^4 = 625$, $10^{-3} = 0{,}001$

eşitliklerinden sırasiyle,

$\log_4 16 = 2$, $\log_2 8 = 3$, $\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81} = 4$, $\log_{10} 0{,}1 = -1$, $\log_5 625 = 4$,

$\log_{10} 0{,}001 = -3$ logaritma eşitlikleri yazılabilir.

b) ÖDEVLER:

**I. Aşağıdaki logaritma eşitliklerini, üslü kemiyet eşitlikleri şeklinde yazınız :**

1) $\log_6 36 = 2$ ; 2) $\log_7 343 = 3$ ; 3) $\log_5 125 = 3$ ;

4) $\log_{10} 100 = 2$ ; 5) $\log_3 81 = 4$ ; 6) $\log_{10} 10 = 1$ :

7) $\log_4 64 = 3$ ; 8) $\log_{25} 25 = 1$ ; 9) $\log_a a = 1$ ;

10) $\log_{16} 256 = 2$.

**II. Aşağıdaki sayıların 2 tabanına göre logaritmalarını bulunuz:**

1) 2 ; 2) 4 ; 3) 8 ; 4) 16 ; 5) 32 ; 6) 64 ; 7) 128 ;

8) $2^n$ ; 9) $\frac{1}{2}$ ; 10) $\frac{1}{4}$ ; 11) $\frac{1}{8}$ $\left(\log_2 \frac{1}{8} = -3 \text{ tür.}\right)$

12) $\sqrt{2}$ ; 13) $\sqrt[3]{2}$ ; 14) $\sqrt[4]{2}$ ; 15) $\sqrt[8]{2}$ ; 16) $\sqrt[4]{2^3}$ ; 17) $\sqrt[3]{4}$

18) $\sqrt[3]{16}$ $(\log_2 \sqrt[3]{16} = \log 2^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$ tür.)

**III. Aşağıdaki sayıların 3 tabanına göre logaritmalarını bulunuz:**

1) 3 ; 2) 9 ; 3) 27 ; 4) 81 ; 5) 729 ; 6) $3^n$ ;

7) $\frac{1}{3}$ ; 8) $\frac{1}{9}$ ; 9) $\frac{1}{27}$ ; 10) $\frac{1}{81}$ ; 11) $\sqrt{3}$ ; 12) $\sqrt[3]{3}$ ;

13) $\sqrt[3]{9}$ ; 14) $\sqrt[4]{27}$ ; 15) $\sqrt[5]{27}$ ; 16) $\sqrt[7]{81}$ ; 17) $\sqrt[6]{243}$.

**IV. Aşağıdaki sayıların 10 tabanına göre logaritmalrrını bulunuz.**

1) $10$; 2) $100$; 3) $1000$; 4) $10000$; 5) $10^a$;
6) $1$; 7) $0{,}1$; 8) $0{,}001$; 9) $0{,}0001$; 10) $0{,}00001$;
11) $\sqrt{10}$; 12) $\sqrt[4]{10}$; 13) $\sqrt[8]{10}$; 14) $\sqrt{10^3}$; 15) $\sqrt[5]{100}$;
16) $\sqrt[5]{1000}$; 17) $\sqrt[5]{1000}$.

**V. Aşağıdaki eşitliklerden x ın değerlerini hesabediniz:**

1) $\log_2 x = 9$; 2) $\log_3 x = 2$; 3) $\log_4 x = 4$;
4) $\log_5 x = 3$; 5) $\log_6 x = 2$; 6) $\log_7 x = 1$;
7) $\log_x 32 = 5$; 8) $\log_x 81 = 4$; 9) $\log_x 125 = 3$;
10) $\log_x 256 = 2$; 11) $\log_2 32 = x$; 12) $\log_3 27 = x$;
13) $\log_4 64 = x$; 14) $\log_5 625 = x$; 15) $\log_2 9{,}25 = x$;
16) $\log_5 0{,}04 = x$.

**VI. Aşağıdaki eşitliklerden logaritma eşitlikleri kurunuz:**

1) $2^6 = 64$; 2) $2^8 = 256$; 3) $3^4 = 81$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{128}{2187}$

**VII. Aşağıdaki logaritma işlemlerini hesap ediniz:**

1) $\log_m (m^{\frac{1}{n}})$; 2) $\log_p \sqrt[q]{p}$; 3) $\log_a a^{\frac{n}{m}}$; 4) $\log_a \sqrt{a^3}$;
5) $\log_a \sqrt{a}$; 6) $\log_a (a^{-x})$; 7) $\log_a (a^{-1})$; 8) $\log_a \frac{1}{a}$;
9) $\log_a \frac{1}{a^2}$; 10) $\log_x \frac{1}{x}$; 11) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9}$; 12) $\log_{\frac{5}{6}} \frac{25}{36}$;
13) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$; 14) $\log_{\frac{5}{7}} \frac{125}{343}$ 15) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{1024}$.

### 3. Üslü ve logaritmik fonksiyonların grafikle gösterilmesi.

**Tarif.** — *a pozitif ve sabit bir sayı olmak şartiyle* $y = a^x$ *şeklindeki fonksiyonlara «ÜSLÜ FONASİYON» lar denir.* Bu fonksiyonlar x in tam ve kesirli, pozitif ve negatif bütün değerleri için belirlidirler.

$a>1$ ve $a<1$ hallerine göre, $y=a^x$ şeklinde bir üslü fonksiyonda x ve y ye önemli değerler vermek suretiyle değişim tabloları düzenlenebilir ve grafikleri çizilebilir:

(Yalnız burada «1» den küçük bir sayının «∞» uncu kuvvetinin sıfıra eşit olduğunu hatırlatalım).

$$a > 1$$

$x = -\infty$ için $y = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} \to 0$

$x = 0$ için $y = a^0 = 1$

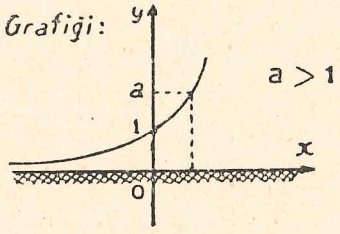
$x = 1$ için $y = a^1 = a$

$x = +\infty$ için $a^{+\infty} = +\infty$.

Değişim tablosu:
$a > 1$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 ↗ | 1 ↗ | $a$ ↗ | $+\infty$ |

Grafiği:




$$0<a<1$$

$x = -\infty$ için $y = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} \to +0.$

$x = 0$ için $y = a^0 = 1$

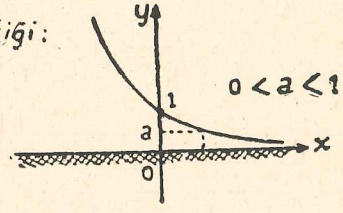
$x = 1$ için $y = a^1 = a$

$x = +\infty$ için $y = a^{+\infty} \to 0.$

Değişim tablosu:
$a < 1$

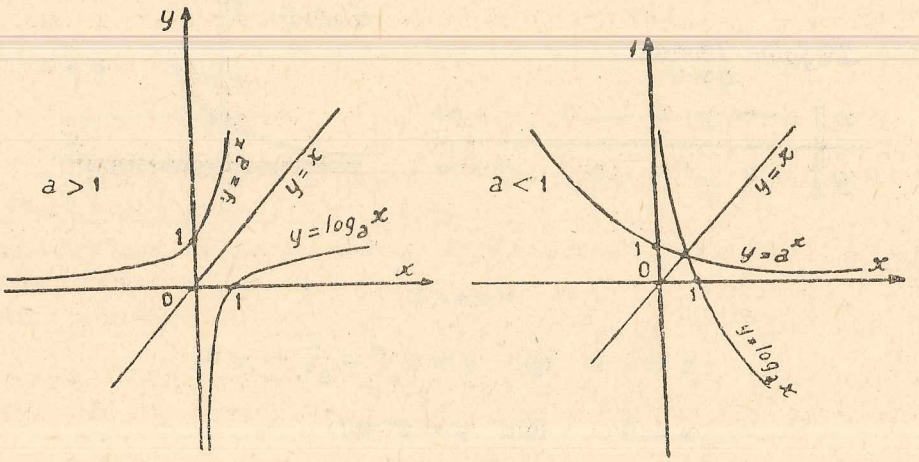
| $x$ | $-\infty$ | 0 | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ ↘ | 1 ↘ | $a$ ↘ | 0 |

Grafiği:



Bu grafiklerden şu sonuçlar çıkarılabilir: $a > 0$ olmak üzere $y = a^x$ eğrileri sürekli olup, x in $-\infty$ dan $+\infty$ a kadar bütün değerleri için x ekseninin üst tarafındadırlar; bu eğriler (0, 1) noktasından geçerler ve x eksenini sonsuzda teğet olarak kabul ederler (*).

$y=a^x$ üslü fonksiyonunda x yerine y ve y yerine x koymak suretiyle elde olunan $x=a^y$ fonksiyonuna veya logaritma tarifine göre $y=\log_a x$ fonksiyonuna LOGARİTMİK FONKSİYON denir. Burada y, a tabanına göre x in logaritmasıdır. $x=a^y$ de a pozitif olduğundan, «y» ye ne değer verilirse verilsin, x daima pozitif kalır. Buradan da yalnız pozitif sayıların logaritmalarının alınabileceği sonucuna varılır. Yukarıda verilen tarifden derhal denilebilir ki, logaritmik fonksiyon, üslü fonksiyonun ters fonksiyonudur. Bu bakımdan $y=\log_a x$ fonksiyonunun grafiği, ikinci bölümde gösterildiği üzere, $y=a^x$ eğrisinin $y=x$ doğrusuna göre simetriği alınmakla elde edilebilir (Şek. 4).

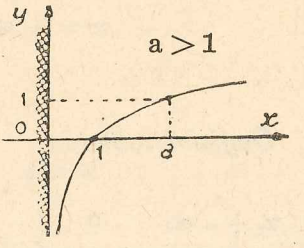



Şekil: 4

Değişim tablosu. $a > 1$

| $x$ | 0 | | 1 | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \log x$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

Grafiği:



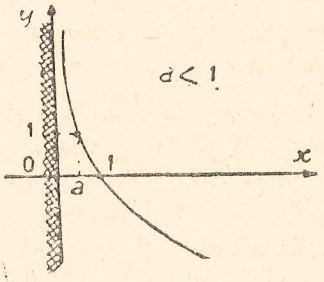

(*) Tarif. — Bir eğriye sonsuzda teğet olan doğruya, o eğrinin «asimtot» 'u denir.

Değişim tablosu:

$0 < a < 1$

| $x$ | $0$ | $a$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y = \log x$ | $+\infty$ ↘ | $1$ ↘ | $0$ ↘ | $-\infty$ |

Grafiği:




Ayrıca, $a>0$ olmak üzere, $a>1$ ve $a<1$ hallerine göke, logaritmik fonksiyonun, doğrudan doğruya değişim tablosu düzenlenebilir ve grafiği çizilebilir.

Bu grafiklerin incelenmesinden; taban, pozitif olmak şartiyle ne olursa olsun, logaritmik fonksiyonlara ait şu sonuçlar söylenebilir:

1. Yalnız pozitif sayıların logaritmaları vardır.

2. Tabanın logaritması «1» ve «1» in logaritması «0» dır.

3. Taban $a>1$ ise, logaritmik fonksiyon artan bir fonksiyondur. Ve «1» den büyük sayıların logaritmaları pozitif; «1» den küçük sayıların logaritmaları negatiftir.

4. Taban $a<1$ ise, logaritmik fonksiyon eksilen bir fonksiyondur. Ve «1» den büyük sayıların logaritmaları negatif; «1» den küçük sayıların logaritmaları pozitiftir.

5. y ekseni bu eğrilerin asimtotudur.

ÖRNEKLER:

1) $y=10^x$ 2) $y=2^x$ 3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y=\log_{10} x$ $y=\log_2 x$ $y=\log_{1/2} x$

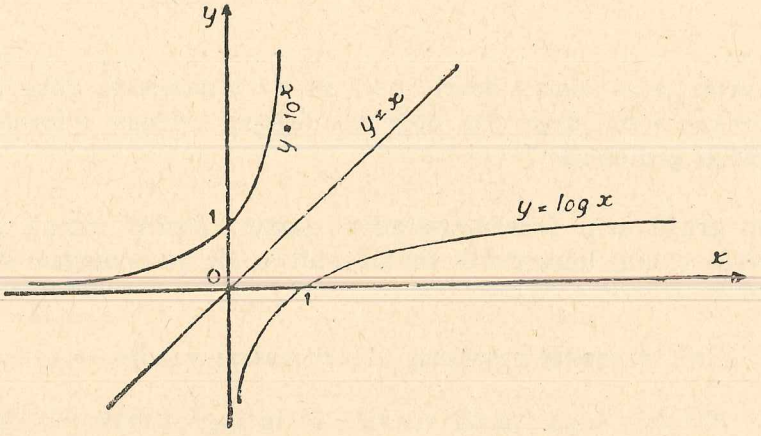
fonksiyonlarının değişimlerinin incelenmesi ve grafikleri.

$y = 10^x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $10$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$y = \log_{10} x$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $10$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



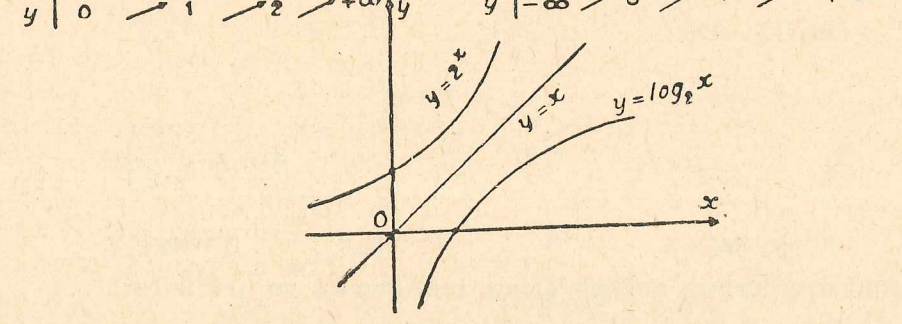

2.

$y = 2^x$

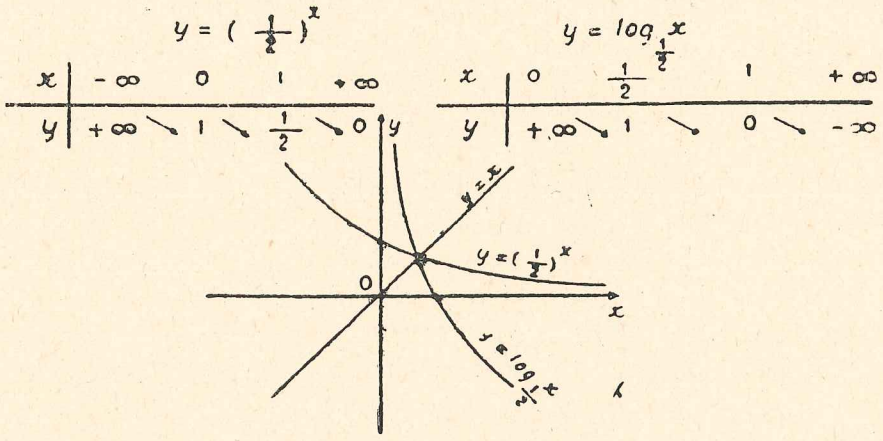
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$y = \log_2 x$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



3.




PROBLEM $y=\log_2 x$ ve $y=\log_{1/2} x$ fonksiyonlarının değişimlerinin incelenmesinden ve çizilen grafiklerden;

a) Bir sayı ile tersinin aynı tabana göre logaritmalarının değerce eşit ve işaretçe ters olduklarını gösteriniz.

b) Bir sayının a ve $\frac{1}{a}$ tabanlarına göre logaritmalarının değerce eşit işaretçe ters olduklarını gösteriniz.

## 4. Kullanılan logaritma sistemleri.

Pratikte iki logaritma sistemi kullanılır:

1°. Tabanı $a = e = 2{,}718281...$ olan ligaritma sistemi,

2°. Taban $a = 10$ olan logaritma sistemi.

Birinci sistemi İskoçyalı bir Baron olan Néper (1550 - 1617) tertiplemiştir. Bu sisteme Néper logaritması veya Tabiî logaritmalar denir; «L» harfiyle gösterilir. Ve $y=Lx$ şeklinde yazılır. Bu sistemin tabanı, «e» sayısının yüksek matematikte büyük önemi vardır. Sonradan Néper biraz karışık bir sistem tertiplemiş olduğunun farkına vardı ve 10 tabanlı bir logaritma sisteminin hesap işleminde birçok kolaylıklar faydalar sağlayacağını düşündü ve böyle sistemi tertiplemesini arkadaşı, Londra Üniversitesi matematik profesörlerinden, Briggs'e tavsiye etti.

Briggs, 1617 de tertiplediği 10 tabanlı logaritma sistemini yayınladı. Bu sisteme Bayağı logaritmalar veya Briggs logaritmaları denir; log harfiyle gösterilir ve $y=\log x$ şeklinde yazılır.

## 5. Logaritma özellikleri.

**1. Bir çarpımın logaritması, çarpanların ayrı ayrı logaritmalarının toplamına eşittir.**

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$\log_a b=x$ ve $\log_a c=y$ ile gösterilirse, logaritma tarifinden;

$b=a^x$; $c=a^y$ dir. Bunlar yanyana çarpılırsa;

$b \cdot c=a^{x+y}$ dir. Ve yine logaritma tarifinden;

$\log_a (b \cdot c)= x + y$ olur. x ve y yerine yukardaki değerleri konulursa,

$\log_a (b \cdot c)=\log_a b+\log_a c$ bulunur.

**2. Bir bölümün logaritması, payın logaritmasından paydanın logaritmasının çıkarılmasına eşittir.**

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \text{dir.}$$

$\frac{b}{c} = x$ ile gösterelim, $b=c \cdot x$ olur. Her iki yanın logaritması alınırsa;

$\log_a b=\log_a c + \log_a x$ ve buradan,

$\log_a x = \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ bulunur.

**3. Bir üslü kemiyetin logaritması, merfuun logaritması ile üssün çarpımına eşittir.**

Üslü kemiyet $b^n$ olsun. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ dir.

$b^n = b.b.b....b$ (n tane) dir. Burada her iki yanın logaritması alınırsa,

$$\log_a b^n = \log_a b + \log_a b + ... + \log_a b \quad \text{olur.}$$

İkinci yanda «n» terim bulunduğu için,

$$\log_a b^n = n . \log_a b \quad \text{bulunur.}$$

**4. Köklü bir kemiyetin logaritması, kökü alınan sayının logaritmasının kök kuvvetine bölünmesine eşittir.**

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b \quad \text{dir.}$$

$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ yazılabileceği için, her iki yanın logaritması alınırsa;

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b \quad \text{bulunur.}$$

**6. Logaritma özellikleri üzerine;**

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER:

1) $\log (a . b . c) = \log a + \log b + \log c$;

2) $\log 3ax(x+y) = \log 3 + \log a + \log x + \log (x+y)$;

3) $\log \frac{1}{abc} = \log 1 - (\log a + \log b + \log c) = -(\log a + \log b + \log c)$;

4) $\log \sqrt{\frac{a^m}{bc^p}} = \frac{1}{2} [m . \log a - (\log b + p . \log c)]$;

5) $\log^p \sqrt{\frac{a^n}{b^m}} = \frac{1}{p} (n . \log a - m . \log b)$;

---

(*) *Kologaritna* – V ilen bir a sayısının tersinin logaritmasına o sayının kologaritması denir ve colog. semboliyle gösterilir. Bu tarife göre;

$$\log \frac{1}{a} = \text{colog } a \quad \text{dır veya,}$$

$$\log \frac{1}{a} = -\log a = \text{colog } a \quad \text{yazılır. Buradan, bir sayının kologaritmasının o sayının logaritmasının ters işaretlisine eşit olduğu sonucuna varılır.}$$

6) $\log \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log(a+x)+\log(a-x)-\frac{1}{2}\cdot\log(a^2+x^2)$;

7) $\log^4\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}\right)^3} = \frac{3}{4}\left[\log a+\frac{1}{2}\log b-\frac{1}{3}(\log a+\log b)\right]$

$= \frac{1}{2}\cdot\log a+\frac{1}{8}\cdot\log b$

b) ÖDEVLER :

$\log 2=0{,}30103$; $\log 3=0{,}47712$; $\log 4=0{,}60206$

$\log 5=0{,}69897$ yardımı ile aşağıdaki logaritmaları hesap ediniz.

1. a) log 200, b) log 2000, c) $\log\sqrt{2}$, d) $\log^3\sqrt{16}$;
2. a) log 30, b) log 300, c) $\log\sqrt{3}$, d) $\log^3\sqrt{81}$;
3. a) $\log\sqrt{3.5}$ b) $\log\sqrt{\frac{5}{3}}$, c) $\log\sqrt{5}$, d) $\log\frac{5}{\sqrt{3}}$;
4. a) log 20, b) log 972, c) log 0,02, d) log 0,002;
5. a) log 0,3, b) log 0,0003, c) log 0,09, d) log 0,27;
6. a) $\log(2.8)^3$, b) $\log(3.16)^2$, c) $\log(3.32)^3$ d) log (3.5.9);
7. a) $\log^5\sqrt{9}$, b) $\log({}^5\sqrt{2}.{}^4\sqrt{3})^4$, c) $\log(2^5.3^7\sqrt{5})$, d) $\log 3^4\sqrt{2}$;
8. a) $\log 5^3\sqrt{9}$, b) $\log {}^2/_3.\sqrt{5}$, c) $\log({}^3/_4)^2.{}^4\sqrt{3}.{}^5\sqrt{2}$, d) $\log 2^{7.5}\sqrt{5}$.

**I. Aşağıdaki harfli ifadelerin logaritmalarını alınız.**

1. a) log abcd, b) $\log\frac{abc}{de}$, c) log 2ab(x+y), d) $\log\frac{ab}{c(x-3)}$;
2. a) log (a+b)(x−y), b) $\log\frac{a}{x+y}$, c) $\log a^x.b^y$, d) $\log\frac{a^xb}{c}$;
3. a) $\log\frac{a^mb^n}{c^p}$, b) $\log\frac{2a^mb^n}{3c^x}$, c) $\log\frac{2^5.p^m.c^n}{3.b^x.d^y}$, d) $\log\frac{a^{m3}\sqrt{b}}{t}$;
4. a) $\log\frac{x^{mn}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$, b) $\log\frac{a^m\sqrt{b}}{c}$, c) $\log\frac{x^{m\,n}\sqrt{a}}{a}$, d) $\log\frac{a^2}{4}\sqrt{c}$;

5. a) $\log \frac{a^2\sqrt{3}}{4 \cdot b}$, b) $\log \frac{a^2\sqrt{5}}{5b^2}$, c) $\log \sqrt[3]{\frac{4a}{3b}}$, d) $\log \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$;

6. a) $\log \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[r]{ab}}$, b) $\log \frac{\sqrt[m]{\sqrt{a}}}{b^n}$, c) $\log \frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{a^3}{b}}$, d) $\log \frac{(x-y)^{m+n}}{(x+y)^{m-n}}$;

7. a) $\log \frac{x(a-b)^4}{y\sqrt[n]{(ax-b)^2}}$, b) $\log \frac{1}{(x^2+y^2)^3}$, c) $\log \left(\frac{xy-c}{d\sqrt{a-b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

d) $\log \frac{1}{a^3\sqrt{x-y}}$.

**II. Aşağıdaki logaritmik toplam ve farkları, çarpım ve bölüm logaritmaları haline çeviriniz.**

1) $\log a - \log b + \log c$; 2) $\frac{1}{3} \cdot \log a + \frac{1}{4} \cdot \log b - \frac{1}{5} \cdot \log c$;

3) $2 \cdot \log a - 3 \log b + 4 \cdot \log c$; 4) $\log a + \log d - (\log b + \log c)$;

5) $3 \cdot \log a - \frac{1}{3} \cdot \log b + 4 \log c - \frac{1}{4} \cdot \log d$;

6) $\frac{3}{4} \cdot \log (ax + b) - \frac{2}{3} \cdot \log (cx + d)$;

7) $\frac{2}{3} \cdot \log (x^2 - y^2) - \frac{1}{2} \cdot [\log (y+x) + \log (x - y)]$;

8) $\log \frac{x}{y} + \log \frac{y}{z} + \log \frac{a}{b} - \log \frac{x}{b} + \frac{4}{5} \cdot \log (ex+f)$;

9) $\log \frac{a}{b} - \log \sqrt{\frac{a}{b}} + \log (a \cdot b) - 2 \cdot \log (a - b)$.

**7. Bayağı logaritmaların incelenmesi.**

«10» un tam kuvvetleri olan sayıların logaritmalarını düşünelim:

| | |
|---|---|
| $\log 10 = 1$ dir; çünkü | $10^1 = 10$ dur. |
| $\log 100 = 2$ dir; » | $10^2 = 100$ » |
| $\log 1000 = 3$ tür; » | $10^3 = 1000$ » |
| . . . . . | . . . . . |
| $\log 10^n = n$ | |
| $\log 10^{n+1} = n + 1$ | |

Görüldüğü üzere 10'un tam kuvvetlerinin logaritmaları birer tamsayıdır. «10» un tam kuvvetleri olan sayılar arasında kalan bütün diğer sayıların bayağı logaritmaları ise, TAM KISIM (karakteristik) la, bir ONDALIK KISIM (mantis) dan teşekkül eder. log A = 5,39488 de A sayısının logaritmasının tam kısmı 5, ondalık kısmı 39488 dir.

**1. Bir tamsayının logaritmasının tam kısmının bulunması.**

a) Sayı «1» den büyükse :

Bir rakamlı sayıların hepsi «1» ile «10» arasında bulunduğunda, bu sayıların logaritmaları «0» ile «1» arasındadır. Buna göre, bir rakamlı sayıların logaritmaları «0, m» şeklinde, tam kısmı sıfır bulunan bir ondalık kesirdir. Logaritma cetvelinden : log 2 = 0,30103 ; log 3 = 0,47712 bulunur.

Üç rakamlı sayıların hepsi 100 ile 1000 arasında bulunduğundan, bu sayıların logaritmaları 2 ile 3 arasındadır. Buna göre üç rakamlı sayıların logaritmaları «2, m» şeklinde, tam kısmı 2 olan ondalık bir kesirdir. Bu düşünceler devam ettirilirse;

«1» den büyük tamsayıların logaritmalarının tam kısmı, bu sayıların rakamları sayısının bir eksiğine eşittir, sonucuna varılır.

b) Sayı «1» den küçükse :

1; 0,1; 0,01 ve 0,001 sayılarının logaritmalarını düşünelim :

$\log 1 = 0$ dir; çünkü $10^0 = 1$ dir.

$\log 0{,}1 = -1$ dir; çünkü $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ dir.

$\log 0{,}01 = -2$ dir; çünkü $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ dir.

$\log 0{,}001 = -3$ dür. çünkü $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ dir.

Görüldüğü üzere, 1 ile 0,1 arasındaki bir sayının logaritması tam kısmı «0» olan negatif ondalık bir kesirdir. Aynı suretle, 0,1 ile 0,01 arasın-

daki bir sayının logaritması, —1 ile —2 arasında, yani tam kısmı —1 olan negatif ondalık ibr kesirdir. Bu düşünceler devam ettirilirse; «1» den küçük sayıların logaritmalarının negatif oldukları sonucuna varılır.

Yalnız logaritma cetvellerinde logaritmaların ondalık kısmı pozitif olarak ifade edildiğinden, aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere, işlem yapılarak logaritmaların ondalık kısmı pozitif kılınır.

log A = —2,415678 olsun. İkinci yana +1 ve —1 eklenirse;

log A = —2 — 0,415678 = — 2 — 1 + 1 — 0,415678

log A = — 3 + 0,584322 bulunur. «—» işareti yalnız logaritmanın tam kısmına ait olduğundan bu logaritma,

$$\log A = \bar{3},584322 \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

Bu düşünüşe göre, log 0,03 ü hesap edelim;

$$\log 0{,}03 = \log \frac{3}{100} = \log 3 - \log 100 = 0{,}47712 - 2 = \bar{2},47712;$$

log 0,003 ise ;

$$\log 0{,}003 = \log \frac{3}{1000} = \log 3 - \log 1000 = 0{,}47712 - 3 = \bar{3},47712;$$

ve log 0,0003 ise;

$$\log 0{,}0003 = \log \frac{1}{10000} = \log 3 - \log 10000 = 0{,}47712 - 4 = \bar{4},47712;$$

bulunur. Bu düşünceler böylece devam ettirilirse :

«1» den küçük sayıların logaritmalarının tam kısmı negatif bir sayıdır. Bu sayının mutlak değeri — virgülden önce ve sonra — ilk rakama kadar ki sıfırların sayısına eşittir, sonucuna varılır.

**2. Kesirli sayıların logaritmalarının tam kısımlarının bulunması:**

8,5 ; 45,21 ve 195,53 sayılarını düşünelim; 8,5 sayısı 8 ve 9 sayıları arasında bulunduğundan, logaritması bu iki sayının logaritmaları arasında olması gerekir. 8 ve 9 sayılarının tam kısımları «0» olduğuna göre 8,5 sayısının logaritmasının da tam kısmı «0» dır. Aynı düşünüşle 45 ve 46 sayılarının logaritmalarının tam kısımlarının «1» oluşundan bu sayılar arasında bulunan 45, 21 sayısının logaritmasının da tam kısmı «1» dir.

Ve son olarak 195, 53 sayısı 195 ve 196 sayıları arasında bulunduğundan, logaritmasının tam kısmı 2 dir. Bu düşünceler devam ettirilirse :

Ondalık kesirli bir sayının logaritmasının tam kısmı, tamsayı kısmının logaritmasının tam kısmına eşittir, sonucuna varılır.

3. 25,681 ve 2,5681 gibi rakamları aynı virgüllerinin yerleri başka olan sayıların logaritmalarını düşünelim. Önceki kaideye göre, 2,5681 sayısının logaritmasının tam kısmı «0» dır. Ondalık kısmını «m» ile gösterelim. Buna göre log 2,5681 = log 0, m dir. Diğer sayıya gelince,

log 25,681 = log (2,5681 . 10) = log 2,5681 + log 10 = 0, m + 1 = 1, m olur.

Bunun gibi,

log 856,5 = 2,93273 ; log 8,565 = 0,93273 ; log 0,0008565 = 4,93273 tür.

Demek ki :

Rakamları ve yazılıştaki yerleri aynı, fakat virgüllerinin yerleri başka olan ondalık kesirli sayıların logaritmalarının ondalık kısımları aynı bir sayıdır.

4. 5, 50, 500 saylarının logaritmalarını düşünelim;

5 sayısının logaritmasının tam kısmı «0» dır. Ondalık kısmını «m» ile gösterelim. Buna göre log 5 = 0, m dir. Diğer sayılara gelince;

log 50 = log (5 . 10) = log 5 + log 10 = 0, m + 1 = 1, m ;

log 500 = log (5 . 100) = log 5 + log 100 = 0, m + 2 = 2, m ;

bulunur. Bu düşünceler devam ettirilirse, aşağıdaki sonuca varılır :

Bir A sayısının 10, 100, 1000... katı olan sayıların logaritmalarının ondalık kısımları, A nın logaritmasının ondalık kısmının aynıdır.

5. **Logaritma cedvellerinin kullanılması.** — Logaritma cedvellerinin muhtelif nevileri vardır. Bunlardan bir kısmı «1» den «100000» e kadar olan tamsayıların logaritmalarını 7 ondalık kısmı ile verirler; bunlara BÜYÜK logaritma cedvelleri denir. Callet, Schrön ve Dupuis... cedvelleri gibi.

«1» den «1000» e kadar olan tamsayıların logaritmaların 5 ondalık kısmı ileveren cedvellere KÜÇÜK logaritma cedvelleri denir; Houel, de Lalande, Bouvard ve Rotinet Dupuis... cedvelleri gibi. Pratikte bu ikinci nevi cedveller kullanılmaktadır.

**Beş ondalıklı cedvellerin kullanılışı.** — Bu logaritma cedvellerini kullanabilmek için aşağıdaki iki problemin çözümünü bilmek gerekir:

1) Verilen bir sayının logaritmasını bulmak;
2) Logaritması verilen bir sayıyı bulmak.

**1. — Verilen bir sayının logaritmasını bulmak.**

a) Verilen sayı cedvelde mevcutsa; bu sayının logaritmasının tam kısmı yukarıda söylenilen kaidelerle doğrudan doğruya bulunur; ondalık kısmı ise, cedvelde bu sayının hizasından okunur.

ÖRNEKLER :

1) 6843 sayısının logaritması; log 6843 = 3,83525 dir.

2) 68,43 sayısının logaritması; bu sayının logaritmasının tam kısmı «1» di. Ondalık kısmı olarak ta 6843 sayısının logaritmasının ondalık kısmı alınır. Buna göre :

$$\log 68{,}43 = 1{,}83525 \text{ bulunur.}$$

b) Verilen sayı cedvelde mevcut değilse; bu halde aşağıda gösterilen örnekler gibi hareket olunur.

ÖRNEKLER :

1) 24647 sayısının logaritmasının hesabı.

Bu sayı 5 rakamlı olduğundan, logaritmasının tam kısmı 4 tür. Logaritmasının ondalık kısmını bulmak için 24647 sayısı 10 ile bölünürse; 2464,7 sayılı elde edilir. Cedvelden, 2464 sayısının logaritmasının ondalık kısmı aranırsa (*) 0,39164 bulunur. 2464 ve 2465 sayılarının logaritmaları arasındaki cedvel farkı, beşinci basamaktan 18 dir. Yeter derecede küçük sayıda sayı artışları için, logaritmaların artışı sayıların artışı ile orantılı kabul edilebileceğinden,

| Sayılar arasındaki fark | Logaritmalar arasındaki fark |
|---|---|
| 1 | 18 ise, |
| 0,7 | a = 12,6 bulunur. |

12,6 sayısı, beşinci basamaktan birime yakın bir hata ile 13 alınabilir.

Böylece bulunan 13 sayısı 2464 sayısının logaritmasının ondalık kısmı olan 0,39164 e eklenirse, 24647 sayısının logaritmasının ondalık kısmı 0,39177 elde edilir. Şu halde :

$$\log 24647 = 4{,}39177 \text{ dir.}$$

2) log 0,0478533 sayısının logaritmasının hesabı.

(*) Cedvelde 246 sayısının karşılığına bakmak gerekir.

Bu sayının logaritmasının tam kısmı 2 dir. Ondalık kısmını bulmak için, bu sayı 10000 ile çarpılırsa 4785,33 sayısı elde edilir. 4785 sayısının logaritmasının ondalık kısmı, cedvelden, aranırsa 0,67988 bulunur. 4785 ve 4786 sayılarının logaritmaları arasındaki fark, beşinci basamaktan 9 dur. Yukardaki örnekte belirtildiği üzere orantı kurulursa; $\frac{1}{0,33} = \frac{9}{a}$ yazılır. Buradan a = 2,97 veya 3, beşinci basamaktan birime yakın bir hata ile, bulunur. Bulunan 3 sayısı, 4785 sayısının logaritmasının ondalık kısmı, 0,67988 in beşinci basamağına eklenirse; 478533 sayısının logaritmasının ondalık kısmı 0,67991 bulunur. O halde :

$$\log 0,0478533 = \bar{2},67991 \text{ dir.}$$

**2. — Logaritması verilen bir sayıyı bulmak.**

a) Logaritmanın ondalık kısmı cedvelde tamamen mevcutsa; bu ondalık kısma tekabül eden sayı cedvelden doğrudan doğruya okunur.

ÖRNEKLER :

1) 2,88395 logaritmasına tekabül eden sayıyı bulalım. Logaritmanın ondalık kısmı, 0,88395 e tekabül eden sayı cedvelde 7655 dir. Ve logaritmasının tam kısmı 2 olduğundan, aranılan sayının tam kısmının üç rakamlı olduğu anlaşılır. Buna göre bulunacak sayı 265,5 dir.

2) $\bar{2}$,18808 logaritmasına tekabül eden sayıyı bulalım. 0,18808 ondalık kısma tekabül eden sayı, cedvelde 1542 dir. Ve logaritmanın tam kısmı 2 olduğundan, aranılan sayı 0,01542 dir.

b) Verilen logaritmanın ondalık kısmı cedvelde mevcut değilse, aşağıdaki örneklerde olduğu gibi hareket edilir :

ÖRNEKLER :

1) Logaritması 4,55575 olan x sayısını bulalım. Cedvelde logaritmanın ondalık kısmı aranır. Bu ondalık kısmın, 3595 sayısının ondalık kısmı (55570) ile 3596 sayısının (55582) ondalık kısmı arasında bulunduğu görülür. Bu logaritmalar arasında fark 0,00012 dir. log x ile log 55570 arasındaki farksa, beşinci basamaktan, 5 tir. Buna göre orantı kurulursa; $\frac{12}{5} = \frac{1}{a}$ yazılır. Buradan a = 0,4 bulunur. Bu sayı 3595 e eklenirse, 3595,4 elde edilir. Logaritmanın tam kısmı 4 olduğundan, aranılan sayının tam kısmının beş rakamlı olduğu anlaşılır. Buna göre aranılan x sayısı, x = 3594 tür.

2) Logaritması $\bar{3},74543$ olan x sayısını bulalım. Logaritmanın 0,74534 ondalık kısmı cedvelden; 5563 sayısının ondalık kısmı (74531) ile 5564 sayısının (74539) ondalık kısmı arasındadır. Bu logaritmalar arasındaki fark 8 ve log x ile log 74531 arasındaki farka 3 tür. Orantı kurulursa; $\frac{8}{3}=\frac{1}{a}$ yazılır. Buradan a = 0,4 bulunur. Bu sayı 5563 sayısına eklenirse, 5563,4 sayısı elde edilir. Logaritmanın tam kısmı $\bar{3}$ olduğundan aranılan sayı, x = 0,0055634 tür.

**6. — Logaritma işlemleri.**

Nümerik uygulamalara geçmeden önce, logaritmalar ve özellikle negatif tam kısmlar üzerine yapılabilecek işlemleri örneklerle inceleyelim.

**Logaritmaların toplamı.** — Logaritmaların tam kısımları pozitifse, toplam ondalık sayıların toplamı gibi yapılır. Logaritmaların bazılarının tam kısımları negatif ise, önce ondalık kısımların toplamı yapılır ve sonra buna tam kısmların cebirsel toplam sonucu eklenir.

ÖRNEKLER :

| I. | | II. | |
|---|---|---|---|
| | 1,92437 | | 1,45475 |
| | 2,02541 | | 0,32454 |
| | 3,72536 | | $\bar{3}$,28022 |
| | 5,89012 | | $\bar{2}$,99137 |
| Toplam | 13,56526 | Toplam | 2,05088 |

**İki logaritmanın farkı.** — Bir logaritmayı diğer bir logaritmadan çıkarmak için, önce ondalık kısımlar ondalık sayılarda olduğu gibi, çıkarılır ve sonra tam kısımların cebirsel farkı alınır.

| I. | | II. | | III. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3,45872 | | $\bar{1}$,48916 | | $\bar{2}$,98541 |
| | 5,73218 | | 5,64321 | | $\bar{5}$,18356 |
| | $\bar{3}$,72654 | | $\bar{7}$,84595 | | 3,80185 |

**Bir logaritmanın bir tamsayı ile çarpımı.** — Bir logaritmayı bir sayı ile çarpmak için, önce ondalık kısım bu sayı ile çarpılır ve sonra buna tam kısmın aynı sayı ile cebirsel çarpımının sonucu eklenir.

ÖRNEKLER :

I. $3,25431 \cdot 5 = 16,27155$ ;

II. $\bar{4},98327 \cdot 3 = \bar{10},94981$ .

**Bir logaritmanın tam bir sayı ile bölünmesi.** — Logaritmanın tam kısmı pozitif ise, bölme ondalık sayılar gibi yapılır.

Tam kısım negatif ise, önce tam kısma, bölenle bölünebilecek şekilde negatif sayılar eklenir sonra, tam kısmı işaretini muhafaza ederek bölme yapılır. Ve ondalık kısma da, tam kısma eklenen negatif sayı pozitif olarak eklenir ve sonra bölme yapılır.

ÖRNEKLER :

I. $5{,}23461 : 3 = 1{,}74487,$

II. $\overline{13},48935 : 5 = (\overline{13}+\overline{2}+2{,}48935) : 5 = (\overline{15}+2{,}48935):5=\overline{3},49787.$

**7. — Logaritma cedveli yardımiyle yapılacak işlemler üzerine,**

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

1) Logaritma yardımı ile ;

$x = 157 \,.\, 0{,}8753 \,.\, 0{,}00643$ çarpımının hesabı.

$\log x = \log 157 + \log 0{,}8753 + \log 0{,}00643$ tür.

$$\begin{aligned} \log 157 &= 2{,}19590 \\ \log 0{,}8753 &= \overline{1},94216 \\ \log 0{,}00643 &= \overline{3},80821 \\ \hline \log x &= \overline{1},94627 \end{aligned}$$

ve buradan $x=0{,}88364$ bulunur.

2) Logaritma yardımı ile ;

$$x = \frac{2.365.45{,}98}{(0{,}0743)^2}$$ ifadesinin hesabı.

$\log x = \log 2{,}365 + \log 45{,}98 - 3 \cdot \log 0{,}0743$ tür.

$$\begin{aligned} \log 2{,}365 &= 0{,}37383 \\ \log 45{,}98 &= 1{,}66257 \\ \hline \log 2{,}365 + \log 45{,}98 &= 2{,}03640 \\ 3.\ \log 0{,}0743 &= \overline{4},61297 \\ \hline \log x &= 5{,}42343 \end{aligned}$$

ve buradan $x=26{,}5110$ bulunur.

b) ÖDEVLER :

**I. Aşağıdaki sayıların logaritmalarını bulunuz:**

1. a) 3743, b) 5436, c) 36954, d) 45976, e) 24587;
2. a) 23,475, b) 5,3654, c) 115,43, d) 103,515, e) 19,513;
3. a) 51880. b) 351200, c) 2300500, d) 243000, e) 27,450;
4. a) 0,26315, b) 0,78969, c) 0,053723, d) 0,02854, e) 0,046721;
5. a) 0,002513, b) 0,0001234, c) 0,006185, d) 0,0009254, e) 0,0002501;
6. a) 123456, b) 0,00004370, c) 295032, d) 20,405, e) 200053;

**II. Aşağıdaki, logaritmaları verilen sayıları bulunuz:**

1. a) 3,47565, b) 3,57012, c) 4,57924, d) 5,13509, e) 6,98712;
2. a) 1,89273, b) 1,34576, c) 1,45612, d) 2,73323, e) 4,55733;
3. a) 0,01497, b) 0,08551, c) 0,53469, d) 6,53501, e) 7,79650;
4. a) $\bar{1}$,36571, b) $\bar{1}$,45050, c) $\bar{2}$,34371, d) $\bar{2}$,42937, e) $\bar{3}$,12536;
5. a) $\bar{3}$,78460, b) $\bar{4}$,68496, c) $\bar{4}$,44555, d) $\bar{3}$,35761, e) $\bar{5}$,82218.

**III. Aşağıdaki hesapları logaritma yardımiyle yapınız:**

1. a) $37{,}25 \cdot 359{,}2$; b) $437{,}7 \cdot 0{,}003047$; $\dfrac{472.0{,}7498}{7342}$;

2. a) $x = \dfrac{973}{6{,}82.0{,}043}$ b) $(7{,}25)^2$; c) $(0{,}5402)^{11}$;

3. a) $\sqrt[3]{\dfrac{25{,}7}{0{,}04357}}$; b) $x = \sqrt{\dfrac{(0{,}012)^3(2{,}7532)}{\sqrt{0{,}002}}}$; c) $5^{10}$;

4. a) $(0{,}4326)^2$; b) $(3845{,}176)^{10}$; c) $(648{,}9517)^{12}$;

5. a) $\sqrt[3]{12}$; b) $\sqrt[3]{17}$; c) $\sqrt[3]{5{,}8}$;

6. a) $\sqrt[5]{0{,}2}$; b) $\sqrt[18]{9{,}817254}$; c) $\sqrt[10]{0{,}07152684}$;

7. a) $x = \sqrt[157]{\left(\dfrac{829}{828}\right)^{361}}$; b) $x = \dfrac{248{,}98.2{,}7284}{1830{,}4}$; c) $x = \dfrac{(0{,}97515)^8}{1582{,}4}$;

8. a) $x = \sqrt[5]{\dfrac{0{,}5142}{375}}$; b) $x = \sqrt[15]{\dfrac{25{,}365}{(0{,}089347)^8}}$; c) $x = \left(\dfrac{3}{27}\right)^3$

9. a) $x = (5^{10} + 0{,}986542)^{15}$; b) $x = \sqrt[157]{\left(\dfrac{829}{828}\right)^{181}} + \dfrac{(45\ 37284)^{120}}{\sqrt[3]{0{,}0005462379}}$;

c) $x = \dfrac{\sqrt[7]{(36926.5)^3} \cdot \sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{(6258{,}96)^2}} + \sqrt[5]{\dfrac{13}{16}}$ ;

10. $x = \dfrac{abc}{d}$ ifadesini

$$\log a = 3{,}27300, \qquad \log c = \bar{1}{,}98494$$
$$\log b = \bar{1}{,}99575, \qquad \log d = \bar{1}{,}59187$$

olduğuna göre hesabediniz.

11. $x = 3a^2b$ ifadesini :

$\log a = 3{,}4125$, $\log b = \bar{2}{,}2509$ olduğuna göre hesabediniz.

12. $\log 2 = 0{,}30103$ ve $\log 3 = 0{,}47712$ bilindiğine göre, logaritma cedveli kullanmaksızın, $\log 288$ i hesabediniz.

13. 7 tabanına göre 139 sayısının logaritmasını hesabediniz.

14. Logaritma yardımı ile hacmı $V = 65{,}628$ cm³ olan bir kürenin yarıçapını hesabediniz.

15. Taban kenarı 1,82544 m olan bir eşkenar üçgenin alanını, logaritma yardımiyle hesabediniz.

## 8. — Trigonometrik fonksiyonların logaritmalarının hesabı.

Logaritma cedvellerinde sayıların logaritmalarını veren cedvellerden başka «0» derec ile «90» derec arasındaki, birer dakika ara ile, bütün açıların sin., tg., cotg., cos. lerinin logaritmalarını veren cedveller de bulunur. Bu cedvellerde bir sayfa bir derece içindir. 45° den büyük açılar için, hesap gerekmez. Herhangi bir sayfa açıldığında yukarıda, soldan sağa doğru, sıralanan sin., tg., cotg., cos. yazılarına karşılık; altta, bunun ters sırası cos., cotg., tg., sin. yazıları bulunur. Buna göre 0° den 45° ye kadar açıların trigonometrik fonksiyonlarının logaritmaları için dereceler yukardan, dakikalar soldan ve sin., tg., cotg., cos. haneleri üstten bakılacaktır. 45° den 90° ye kadar açıların trigonometrik fonksiyonlarının logaritmaları için ise, tersine olarak, dereceler aşağıdan, dakikalar sağdan ve cos., cotg., tg., sin. haneleri alttan bakılacaktır. Bu nokta çok önemlidir; çünkü logaritma almakta yapılan yanlışlıklar çok defa bu noktaya dikkat edilmemekten ileri gelir.

**1. Verilen bir açının trigonometrik fonksiyonlarının logaritmalarının bulunması.**

a) Verilen açıda yalnız derece ve dakikaların bulunması hali: Bu halde logaritma, yukarda açıklandığı üzere, cedvelden kolayca bulunur.

ÖRNEKLER :

$$\log \sin 28^\circ\ 35' = \bar{1},67982$$
$$\log \cos 54^\circ\ 17' = \bar{1},76625$$
$$\log \text{tg}\ 15^\circ\ 52' = \bar{1},54367$$
$$\log \text{cotg}\ 18^\circ\ 18' = 0,48054$$

Sinüs ve kosinüs her zaman «1» den küçük olduklarından, bunların logartimalarının tam kısmları daima negatiftir. 45° in tg. ve cotg'i «1» olduğundan logaritmaları sıfırdır. 45° den küçük açıların tg. ları «1» den küçük bulunduğundan logaritmalarının tam kısmı negatif, 45° den büyük açıların tg. ları «1» den büyük olduklarından logaritmalarının tam kısmı sıfır veya pozitif bir sayıdır. Cotg. lar için bu düşünceler tamamiyle ters sonuç verirler.

b) Verilen açıda saniyelerin de bulunması hali: Cedvellerde dakikadan küçük kısımlar yoktur. Saniyelere ait kısım oranlama ile bulunur.

ÖRNEKLER :

1) log sin 29°25'37" nin hesabı.

log sin 29° 25' = $\bar{1}$,69122 cedvelden bulunur. Bunun hemen altına düşen bir dakika büyük açıya yani 29° 26' ya bakılır. Bu derecye ait (sin) logaritması, log 29° 26' = $\bar{1}$,69144, ile farkı bulunur. Bu fark iki logaritmanın sağ hizasında «D» sırasında 22 olarak yazılıdır. Burada,

60" için logaritma farkı 22 olursa,

37" için logaritma farkı a = 14 bulunur.

Fakat bu orantıyı kurmadan sayfanın yan tarafında 22 li hesap grubundan aranılan bulunabilir. Hesap grupları yukardan aşağıya bir çizgi

ile ikiye bölünmüştür. Solda saniyeler, sağda logaritma farkları yazılıdır. 30 saniyenin hizasında «11» bulunur, sonra 7 saniye hizasında okunan «2,6» alınır; bunlar toplanırsa 13,6 veya tam olarak 14 bulunur. Böylece bulunan 37 saniyeye ait (sin.) logaritma farkı «14», küçük açının, (29° 25′) sinüs logaritması $\bar{1}$,69122 ya katılırsa; log sin 29°25′37″ = $\bar{1}$,69136 bulunur.

| | 22 |
|---|---|
| 6 | 2,3 |
| 7 | 2,6 |
| 8 | 2,9 |
| 9 | 2,3 |
| . | . |
| . | . |
| 30 | 11,0 |
| 40 | 14,7 |
| 50 | 18,3 |

Pratik olarak bu hesaplar için şu metod kullanılır :

log sin . 29° 25′ = $\bar{1}$,69122

D = 22 30″ için 11

7″ » 3

37″ » 14

log sin . 29°25′37″ = $\bar{1}$,69136 (14)

2) log tg 54°26′21″,5 nin hesabı.

Derec alttan, dakika sağdan ve tg. hanesi alttan okunacaktır.

log tg. 54° 26″ = 0,14566

D = 27

| | | |
|---|---|---|
| 20″ | için | 9 |
| 1″ | » | 0,45 |
| 0″,5 | » | 0,225 |
| 21″,5 | | 9,675 |

log tg. 54° 26′ 21″,5 = 0,14575675 (9675)

log tg. 54° 26′ 21″,5 = 0,14576 bulunur.

3) log cos. 18° 16′ 25″ nin hesabı.

Burada dikkat edilecek nokta, açı büyüdükçe bunların cos ve cotg. ları küçüleceğinden, 25 saniyeye ait logaritma farkının, 18° 16′ nin cedvelden bulunacak cos. ün logaritmasından çıkarılacağıdır.

log cos 18° 16′ = $\bar{1}$,97754

log cos 18° 17′ = $\bar{1}$,97750

| | | |
|---|---|---|
| 20″ | için | 1,3 |
| 5″ | » | 0,33 |
| 25″ | » | 1,63 |

log cos 18° 16′ 25″ = $\bar{1}$,9775237 (— 1,63)

veya kısaca,

log cos 18° 16′ 25″ = $\bar{1}$,97752 bulunur.

4) log cotg 65° 57′ 05″ nin hesabı.

Derece ve cotg. alttan, dakika sağdan okunur.

$$\begin{array}{lll} \log \operatorname{cotg} 65°\,57' & = & \bar{1},64960 \\ D = 34 \quad 5'' \text{ için } 2,83 & & -\ 2,83 \\ \hline \log \operatorname{cotg} 65°\,57'\,05'' & = & \bar{1},6495717 \text{ veya kısaca,} \end{array}$$

$$\log \operatorname{cotg} 65°\,57'.\,05'' = \bar{1},64957 \text{ bulunur.}$$

**2. Bir açının trigonometrik fonksiyonlarının logaritmaları verildiğine göre açının hesabı.**

ÖRNEKLER :

1) log sin x = 1,43165 bilindiğine göre x açısının hesabı.

$$\begin{array}{l} \log \sin 15°\,40' = \bar{1},43143 \\ \log \sin 15°\,41' = \bar{1},43188 \\ \hline D = 45 \end{array}$$

log sin x — log sin 15° 40′ = 22 olduğuna göre; $\frac{45}{22} = \frac{60''}{a}$ orantısından,

a = 29″ bulunur. Bu 15°40′ ye eklenirse,

$$x = 15°\,40'\,29'' \text{ bulunur.}$$

2) log tg x = 1,57870 bilindiğine göre x açısının hesabı.

$$\begin{array}{lll} \log \operatorname{tg} 20°\,45' & = & \bar{1},57849 \\ D = 38 \quad 30'' \text{ için } 19 & & \vdots \\ \quad 3'' \ \ » \quad 1,9 & & \\ \quad 0'',6 \ » \quad 0,1 & & \\ \hline \quad 33'',6 \quad 21 & & 21 \\ \hline \log \operatorname{tg} 20°45'33'',6 & = & \bar{1},57870 \text{ ve buradan,} \end{array}$$

$$x = 20°\,45'\,33'' \text{ bulunur.}$$

3) log cos x = $\bar{1}$,80636 bilindiğine göre x açısının hesabı.

Açı büyürken cos x ve cotg x in küçüldüğünü unutmamak gerekir.

$$\begin{array}{lll} \log \cos 50°\,12' & = & \bar{1}.80625 \\ D = 16 \quad 40'' \text{ için } 10,7 & & \\ \quad 1'' \ \ » \quad 0,3 & & \\ \hline \quad 41'' \ » \quad 11 & & 11 \\ \hline \log \cos 50°\,11'\,19'' & = & \bar{1},80636 \end{array}$$

$$x = 50°\,11'\,19'' \text{ bulunur.}$$

4) log cotg x = 0,36501 bilindiğine göre x açısının hesabı.

log cotg 23° 21 = 0,36481

D = 35 30″ için 17,5

4″ » 2,5

— 34″ » 20 20

log cotg 23° 20′ 21″ = 0,36501 ve buradan

x = 23° 20′ 26″ bulunur,

### 3. Trigonometrik fonksiyonların logaritmaları üzerine,

ÖDEVLER :

**I. Aşağıdaki yazılı logaritmaların değerlerini bulunuz:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| log cotg | 27° 45′ 28″, | log cotg | 5° 30′ 25″, | log cotg | 80° 29′ 47′, |
| log sin | 23° 32′ 34″, | log sin | 4° 25″ , | log sin | 62° 15′ 36″, |
| log cos | 34° 34′ 34″, | log cos | 3° 25′ 47″, | log cos | 57° 22″ 39″, |
| log tg | 15° 55′ 12″, | log tg | 2° 39′ 38″, | log tg | 75° 25′ 42″, |

**II. Aşağıdaki logaritmaları verilen x açılarını hesaplayınız:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| log sin | $x = \bar{1},53833$, | log cos | $x = \bar{1},76603$, | log tg | $x = \bar{0},14576$ |
| log cotg | $x = \bar{1},64957$, | log sin | $x = \bar{1},47127$, | log cos | $x = \bar{1},63141$ |
| log sin | $x = \bar{1},93804$, | log cos | $x = \bar{1},96898$, | log tg | $x = \bar{1},74375$ |
| log tg | $x = \bar{0},26103$, | log cotg | $x = \bar{1},13757$, | log cotg | $x = \bar{1},51178$ |
| log sin | $x = \bar{1},81234$, | log sin | $x = \bar{1},98134$, | log cotg | $x = \bar{0},25229$ |

**III. Aşağıdaki eşitlikleri sağlıyan x açısını hesaplayınız:**

$\sin x = (0,73)^3$, $\cos x = \sqrt[3]{0,75}$, $\operatorname{tg} x = 4 \cdot (0,7)^3$

## DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

## BİR BİLİNMİYENLİ İKİNCİ DERECE DENKLEMLERİ

**1. Tarih. — Genel olarak $ax^2+bx+c=0$ (1) şeklinde yazılabilen bir denkleme, «bir bilinmiyenli ikinci derece denklemi» denir.**

Burada a, b, c pozitif veya negatif, nümerik veya harfli, tek veya çok terimli, belli sabit sayılardır.

$3x^2+\frac{nx}{2}=2x(x-m)-nx+\frac{27}{6}$ denklemini düşünelim. Denklemin her iki yanı paydadan kurtarılırsa,

$18x^2+3nx=12x(x-m)-6nx+27$ olur. Benzer terimler sadeleştirilir ve bütün terimler birinci yana geçirilirse,

$$18x^2+3nx=12x^2-12mx-6nx+27$$

$$18x^2+3nx-12x^2+12mx+6nx-27=0$$

$$6x^2+(9n+12m)x-27=0$$

elde edilir. (1) genel şekline getirilmiş bulunan denklemde,

$$a=6,\ b=9n+12m,\ c=-27 \text{ dir.}$$

NOT. — 1. İkinci derce denkleminde a daima sıfırdan farklıdır. $a=0$ olursa, $ax^2$ terimi sıfır olur ve denklem $bx+c=0$ şeklinde birinci dereceye inmiş olur.

2. Bir denklemi sağlıyan bilinmiyenin değerlerine o denklemin kökler'i; bu kökleri bulma işlemine de denklemin çözümü denir.

### 2. Bir bilinmiyenli ikinci derece denkleminin çözümü.

1. Özel hal : $b=0$ ve $c=0$.

Bu halde (1) genel denklemi $ax^2=0$ şeklini alır. $a\neq 0$ olduğundan,

$$x^2=0 \quad \text{ve}$$
$$x=0 \quad \text{olur.}$$

Denklemin sıfıra eşit bir çift kökü vardır denilir.

2. Özel hal : $b = 0$ ve $c \neq 0$.

Bu halde, (1) genel denklemi $ax^2 + c = 0$ şeklini alır. Buradan,

$$ax^2 = -c \quad \text{ve}$$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \text{olur.}$$

1°. $-\frac{c}{a} > 0$ ise,

$$x = \mp\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{elde edilir}$$

O halde denklemin,

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \; ; \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

şeklinde gerçek simetrik iki kökü vardır.

2°. $-\frac{c}{a} < 0$ ise,

x ne olursa olsun karesi negatif bir sayıya eşit olamıyacağından, denklemin gerçek kökleri yoktur. Bu takdirde denklemin iki sanal kökü vardır denilir. Özet olarak, $ax^2 + c = 0$ denkleminde a ve c ters işaretli iseler denklemin iki gerçek kökü, a ve c ayni işaretli iseler iki sanal kökü vardır (genel olarak kökleri yoktur) denilir.

3. Özel hal : $b \neq 0$ ve $c = 0$.

Bu halde, (1) genel denklemi $ax^2 + bx = 0$ şeklini alır. Bu denklem $x(ax + b) = 0$ şeklinde yazılabilir. Çarpanlardan biri sıfırsa çarpım da sıfır olaracağından, denklemin kökleri :

$$x' = 0, \quad x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEKLER :

1°. $7x^2 = 0$ denkleminin çözümü.

Denklemin $x = 0$ dan ibaret bir çift kökü vardır.

2°. $7x^2 + 33 = 0$ denkleminin çözümü.

$x = \pm i\sqrt{\frac{33}{7}}$ dir. Denklemin simetrik iki sanal kökü vardır. (*)

(*) $i^2 = -1$ eşitliğini sağlıyan «i» ye Sanal Sayı Birimi denir. «i» li sayılara da Sanal Sayılar adı verilir.

Örnekler : $\sqrt{-9} = \sqrt{-1.9} = \sqrt{i^2.9} = \mp 3i$ ; $\sqrt{-4.5} = \sqrt{-1.4.5} = \sqrt{i^2.4.5} = \mp 2i\sqrt{5}$.
Negatif sayıların çift kuvvetten kökleri sanaldır. Neden ?

3°. $12x^2 = 4(x^2 + 8)$ denkleminin çözümü.

Denklem sadeleştirilirse, $8x^2=32$ elde edilir. Buradan,

$x=\mp\sqrt{\frac{32}{8}} = \mp 2$ bulunur. Denklemin simetrik iki gerçek kökü vardır.

4°. $3x^2 + 5x = 0$ denkleminin çözümü.

$x(3x + 5) = 0$ yazılır. Buradan,

$$x' = 0, \quad x'' = -\frac{5}{3} \text{ iki gerçek kök bulunur.}$$

GENEL HAL:

$ax^2+bx+c=0$ (1) genel denkleminin iki yanı, $a\neq 0$ olduğundan, a ile bölünebilir.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (2). Burada, ilk iki terim $x^2+\frac{b}{a}x$ ;

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ nın karesinin ilk iki terimidir.

Gerçekten,

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ ve buradan,

$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$ olur ve bu değer (2) denkleminde yerine konursa,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{veya,}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad (3) \text{ olur.}$$

Burada birinci yan, iki terimlinin karesi olduğundan, pozitiftir ve eşitlik ancak $b^2-4ac \geq 0$ ise, mümkündür. Bundan $\Delta=b^2-4ac$ nin işaretine göre, üç hal düşünülebilir.

1. Hal: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Bu halde, (3) denklemin ik yanının kare kökü alınabilir.

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \text{buradan;}$$

$x = \dfrac{-b \mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (4) bulunur. Bu da ikinci derece genel denkleminin köklerini veren formüldür. Ve kökler,

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{dırlar.}$$

O halde,

$\Delta = b^2 - 4ac$ **pozitif ise, denklemin gerçek iki farklı kökü vardır.**

2. Hal : $\Delta = b^2 - 4ac = 0.$

Bu halde (3) denklemi,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \text{olur. Buradan,}$$

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \text{ve}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{bulunur.}$$

$\Delta = 0$ halinde bir çift gerçek kök,

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a} \quad \text{vardır.}$$

Sonuç olarak

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ **ise, denklemin bir çift gerçek kökü vardır.**

3. Hal : $\Delta = b^2 - 4ac < 0.$

Bu halde, (3) denkleminin — bir tam kare negatif gerçek bir sayıya eşit olamıyacağından — gerçek kökleri yoktur.

Ek: $-\frac{b}{2a}=\alpha$, $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\beta$ ile gösterilirse, $\Delta<0$ halinde denklemin kökleri $x'=\alpha+i\beta$, $x''=\alpha-i\beta$ şeklinde eşlenik karmaşık sayılardır.

Sonuç olarak,

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ **ise, denklemin gerçek kökleri yoktur.**

**TARİF. — «$b^2 - 4ac$» ye bir bilinmiyenli ikinci derece denkleminin diskriminantı denir.**

NOT. — 1. İkinci derece denkleminde a ile c nin işaretleri ters $\Delta > 0$ dır ve denklemin daima iki gerçek kökü vardır.

2. İkinci derece denkleminde «b» çift olsun; genel denklemde $b = 2b'$ konulursa,

$ax^2 + 2b'x + c = 0$ olur ve kök formülü,

$x=\frac{b'\mp\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ şeklinde yazılır (yarım katsayı metodu).

3. $x^2$ nin «a» katsayısı ne olursa olsun, ikinci derece denklemi $x^2+px+q=0$ şeklinde yazılabilir. Çünkü, $ax^2+bx+c=0$ denklemi a ile bölünür ve $\frac{c}{a}=q$ ve $\frac{b}{a}=p$ konulursa yukarıda yazılan şekil elde edilir. Kökler de:

$x=-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ olup «p» de çiftse,

$x=-p'\mp\sqrt{p'^2-q}$ bulunur.

**3. Bir bilinmiyenli ikinci derece denklemleri üzerine,**

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER:

1. $2x^2-5x+2=0$ denkleminin çözümü.

$\Delta=b^2-4ac=25-16=9>0$ ve

$x=\frac{5\mp\sqrt{9}}{4}=\frac{5\mp 3}{4}$, buradan

$x'=2$, $x''=\frac{1}{2}$ dir.

2. $4x^2+4x+1=0$ denkleminin çözümü. (b çifttir)

$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 4 = 0$. Bir çift gerçek kök vardır;

$$x'=x''= -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

3. $4^2x+3x+5=0$ denkleminin çözümü.

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 80 = -71 < 0$, dneklemin gerçek kökleri yoktur.

4. $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{5}{4} = 0$ denkleminin çözümü.

Paydalar eşit kılınır ve tek paydalı yazılırsa,

(A) $\frac{5x^2 - 12x + 4}{4x^2} = 0$ elde edilir. Bu kesirin payını sıfır yapan «x» ın değerleri, kendisini de sıfır yapar. Buna göre verilen denklemin kökleri,

$$5x^2 - 12x + 4 = 0$$

denkleminin kökleridir. (b çift) $\Delta' = 36 - 20 = 16 > 0$ İki gerçek kök vardır.

$$x = \frac{6 \mp \sqrt{16}}{5} = \frac{6 \mp 4}{5} \text{ ve buradan}$$

$$x'=2, \quad x''=\frac{2}{5}$$

Bu değerler (A) kesirinin paydasını sıfıra eşit kıldığından, verilen denklemin kökleridir.

5. $x^2 - \frac{a+b}{ab} \cdot x + \frac{1}{ab} = 0$ harfli denkleminin çözümü.

$ab \neq 0$ olsun; denklem paydadan kurtarılırsa,

$$abx^2 - (a+b)x + 1 = 0 \text{ olur.}$$

$$\Delta = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \text{ buradan;}$$

$$x = \frac{(a+b) \sqrt{(a-b)^2}}{2ab} = \frac{(a+b) \mp (a-b)}{2ab}$$

ve verilen denklemin kökleri de,

$x' = \frac{a+b+a-b}{2ab} = \frac{1}{b}$, $x'' = \frac{a+b-a+b}{2ab} = \frac{1}{a}$ dır.

b) ÖDEVLER:

**I. Aşağıdaki kısa ikinci derece denklemlerini çözünüz:**

1) $2x^2-3x=0$; 2) $-4x^2+5x=0$; 3) $4x^2+7=0$;
4) $x^2-4=0$; 5) $x^2+4=0$; 6) $3x^2-5=0$;
7) $(x-8)^2=100-16x$; 8) $2(45+9x)=(x+9)^2$; 9) $3(x-4)^2-48=0$.

**II. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:**

1) $x^2+2x-8=0$; 2) $-2x^2+7x-3=0$;
3) $x^2+4x+3=0$; 4) $3x^2+6x+1=0$;
5) $6x^2-x-2=0$; 6) $x^2-9x+8=0$;
7) $x^2+2=3x$; 8) $x^2-12x+35=0$;
9) $2x^2-5x+3=0$;
10) $2(x-5)(x-2)-(x-1)(x-3)=-4$;
11) $\frac{3x+15}{5} - \frac{1}{x} = \frac{3x-15}{10} + \frac{29}{5}$;
12) $(\sqrt{3}-2)x^2-2x+2-\sqrt{3}=0$;
13) $\frac{5x^2}{4} - \frac{7(x^2+x)}{2} + x^2 - x = 3x^2 - \frac{7x}{8}$;
14) $7x^2-x+13=0$; 15) $2x^2+11x-13=0$;
16) $\frac{x^2}{6} - \frac{x}{4} + \frac{1}{12} = 0$; 17) $1{,}75x^2+2x+12{,}4=0$;
18) $x^2-3x+2=0$; 19) $x^2-2x-3=0$;
20) $5x^2+9x+18=0$; 21) $-2x^2+7x-3=0$;
22) $5x^2+6x-8=0$; 23) $x^2+{}^5/_2x+1=0$;
24) $x^2+2x-1=0$; 25) $x^2-4x+40=0$;
26) $4x^2-20x+25=0$; 27) $3x^2-4x+2=0$;
28) $4x^2-9x+2=0$; 29) $9x^2+6x+1=0$;
30) $x^2+x+1=0$; 31) $x^2+4x-9=0$;
32) $(x^2-6x+5)(x^2-9x+20)=0$.

**III. Aşağıdaki kesirli denklemleri çözünüz:**

1) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{1}{x+3}$; 2) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{8}{3}$;

3) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} = 0$;

4) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$;

5) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$;

6) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 0$;

7) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 0$;

8) $\frac{x+2}{1+2x} = \frac{3x+4}{3+4x}$;

9) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 2$;

10) $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$;

11) $\frac{7}{x-5} + \frac{8}{x-5} = -\frac{5}{2}x$;

12) $\frac{8}{x-1} + 8x = \frac{5x}{6} + \frac{51}{2}$;

13) $\frac{5x+3}{x-1} + \frac{2x-3}{x-2} = -\frac{3}{2}$;

14) $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-3} = 1$;

15) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{2}$;

16) $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x-7}{x-1} = 4 - \frac{3x-1}{x+1}$;

17) $\frac{5}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{3x-1}{x(x-1)} = 1$;

18) $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2+7x-4} = \frac{6}{2x-1}$

19) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{6}{x}$;

20) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}$;

21) $\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$;

22) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} = \frac{6x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

**IV. Aşağıdaki harfli denklemleri çözünüz:**

1) $x^2-(a+b)x+ab=0$;

2) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$;

3) $c^2x^2+(ac-bc)x-ab=0$;

4) $a^2x^2+1=b^2x^2+(a-b)x+(a+b)x$;

5) $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$;

6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$ ( Cevap: $x' = -a$, $x'' = -b$ )

7) $c^2x^2-2acx+a^2-b^2=0$;

8) $\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}{1-\dfrac{a-x}{a+x}}=a-1$ $\left[\text{Cevab: } x=\dfrac{(a-1)\mp\sqrt{a^2-6a+1}}{2}\right]$

9) $\left[\dfrac{a+x}{x-a}\right]^2=1+bx$ 10) $(a^2-b^2)x^2=2ax-1$;

11) $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{a-x}{a+x}=\dfrac{3}{4}$; 12) $\dfrac{2(1+lx)}{1-lx}=\dfrac{l^2x^2+3}{1-l^2x^2}$

13) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ $\left[\text{Cevap: } x'=a+b;\ x''=\dfrac{2ab}{a+b}\right]$

14) $\dfrac{(x-a)^3-(x-b)^3}{(x-a)^2+(x-b)^2}+a-b=0$ $\left[\text{Cevap: } \begin{matrix}x'=a\\x''=b\end{matrix}\right]$;

15) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{3a^2+b^2}{3b^2+a^2}$ $\left[\text{Cevap: } x'=\dfrac{a-b}{a+b};\ x''=\dfrac{a+b}{a-b}\right]$

16) $\dfrac{x^2}{(m+n)^2}-\dfrac{4mnx}{(m+n)^2}-(m-n)^2=0$

(Cevap: $x'=(m+n)^2$, $x''=-(m-n)^2$);

17) $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+b+c-2a=0$;

18) $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ 19) $(a^2-b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0$;

20) $a(a+1)x^2+x-a(a-1)=0$;

21) $(4a^2+4a+1)x^2-(4a^2+2a)x+a^2=0$;

22) $\dfrac{x+a}{x+b}+\dfrac{x+b}{x+a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}+\dfrac{ab}{a^2+b^2}$;

23) $4a^2x=(a^2-b^2+x)^2$;

24) $\dfrac{(a-x)(x-b)}{(a-x)-(x-b)}=x$; 25) $x^2-\dfrac{a^2b^2+(a+b)^4}{ab(a+b)^2}x+1=0$

26) $\dfrac{a+b}{x+b}+\dfrac{a+c}{x+c}=\dfrac{2(a+b+c)}{x+b+c}$;

27) $abx^2+(3a^2+b^2)x-(6a^2+ab-2b^2)=0$;

28) $(a^2+ab-2b^2)x^2+3b^2x-(a^2-ab-2b^2)=0$;

29) $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+x}-\frac{2c}{c+x}=0$;

30) «—2» sayısının $2x^3-3mx-2=0$ denkleminin kökü olabilmesi için «m» ne olmalıdır? «m» yi bulduktan sonra, diğer kökleri bulunuz.

31) $4x^3+2x^2-12x+m=0$ denklemi içinde aynı soru.

32) $-x^3-3mx^2+x+6=0$ denklemi için de aynı soru.

33) $x^2+(a-1)x+a-2=0$ denkleminin iki eşit kökü olabilmesi için «a» ne olmalıdır ?

34) $mx^2-2(m-1)x+3m-1=0$ denkleminin iki eşit kökü olabilmesi için «m» ne olmalıdır ?

35) $(m+1)x^2+2(m-3)x+5m+7=0$ denklemi için de aynı soru.

36) **İkinci derece denkleminin çözümü için başka metod. —**

Denklem,

$2x^2-3x-7=0$ olsun. Burada, $x=y+z$ (1) koyalım.

$2y^2+4yz+2z^2-3y-3z-7=0$ veya,

$2y^2+(4y-3)z+2z^2-3y-7=0$ olur. Burada,

$4y-3=0$ (2) olmak üzere «y» seçilirse;

$2y^2+2z^2-3y-7=0$ olur ve burada «y» yerine (2)

den elde edilecek $y=\frac{3}{4}$ değeri konulursa;

$$2z^2+\frac{9}{8}-\frac{9}{4}-7=0,$$

$$2z^2=\frac{56+18-9}{8}=\frac{65}{8} \quad \text{ve}$$

$z^2=\frac{65}{16}$ ve buradan, $z=\mp\frac{\sqrt{65}}{4}$ bulunur.

Böylece elde edilen «y» ve «z» nin değerlerinden (1) bağıntısı yardımiyle verilen denklemin kökleri :

$$x=\frac{3\mp\sqrt{65}}{4} \quad \text{bulunur.}$$

37) Bu metodu uygulıyarak $7x^2+2x-4=0$ ve $3x^2+15x+11=0$ denklemlerinin köklerini bulunuz.

## 4 İKİNCİ DERECE DENKLEMLERİNİN KÖKLERİYLE KAYSAYILARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

1. İkinci derece denkleminin kökleriyle aktsayıları arasında basit ve fakat çok önemli iki bağıntı vardır.

**Teorem.** — $ax^2+bx+c=0$ denkleminin gerçek kökleri $x'$, $x''$ ise,

$$x'+x''=-\frac{b}{a}\ ; \qquad x'\cdot x''=\frac{c}{a} \text{ dır.}$$

1. İspat (daha ziyade bir sağlamadır).
İkinci derece genel denkleminin kökleri,

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (1) \text{ dir.}$$

(1) bağıntıları yanyana toplanırsa;

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a}=-\frac{2b}{2a}.$$

$$\boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}} \quad \text{bulunur.}$$

Bir kez de (1) bağıntıları yanyana çarpılırsa;

$$x'\cdot x''=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ae})}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2},$$

$$\boxed{x'\cdot x=\frac{c}{a}} \quad \text{elde edilir.}$$

2. İspat. —

$x'$ ve $x''$ denklemin kökleri olduğuna göre, herbiri $ax^2+bx+c=0$ denklemini sağlıyacaktır. Yani

$$ax'^2+bx'+c=0 \qquad (1)$$
$$ax''^2+bx''+c=0 \text{ dır.} \qquad (2)$$

Bu bağıntılar yanyana çıkarılırsa,

$$a(x'^2 - x''^2) + b(x' - x'') = 0 \text{ olur.}$$

$x'' \neq x'$ ise bu bağıntı $x' - x'' \neq 0$ ile bölünebilir. Buradan,

$$a(x' + x'') + b = 0 \text{ ve}$$

$$\boxed{x'' + x'' = -\frac{b}{a}} \text{ olur. Bu bağıntıdan}$$

$b = a(x' + x'')$ bulunur ve (1) eşitliğinde yerine konulursa,

$$ax'^2 - a(x' + x'')x' + c = 0 \text{ ve buradan}$$

$$\boxed{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}} \text{ bulunur.}$$

NOT. 1. — İkinci derec denklemi $x^2 + px + q = 0$ şeklinde ise,

$$x' + x'' = -p,$$
$$x' \cdot x'' = q \text{ dür.}$$

2. — İkinci derec denkleminin kökleri farkını veren formülü bulunuz.

$$\left( \text{Cevap: } x' - x'' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \right)$$

UYGULAMA : $-ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözemeden, köklerinin sayısı ile işaretlerinin incelenmesi.

A. $b^2 - 4ac > 0$ olsun. Kökler gerçek ve farklıdırlar. İşaretlerine gelince:

1°. $\frac{c}{a} > 0$ ise, $x'$ ve $x''$ ters işaretlidirler.

Bu halde $-\frac{b}{a} > 0$ ise, her iki kök pozitiftir.

$-\frac{b}{a} < 0$ ise, her iki kök negatiftir.

2°. $\frac{c}{a} < 0$ ise, kökleri ters işaretlidir.

Bu halde,

$-\frac{b}{a} > 0$ ise, mutlak değerce büyük olan kök pozitiftir.

$-\frac{b}{a} < 0$ ise, mutlak değerce büyük olan kök negatiftir.

3°. $\frac{c}{a} = 0$ ise, köklerden biri sıfırdır. $x' = 0$ ise, $x''$ yi bulunuz ?

B. $b^2 - 4ac = 0$ olsun. Gerçek ve birbirine eşit iki kök vardır. Bu kök, $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ dır ve işareti doğrudan doğruya anlaşılır.

C. $b^2 - 4ac < 0$ olsun. Denklemin gerçek kökleri yoktur.

ÖRNEKLER :

**Aşağıdaki denklemlerin köklerinin varlığını ve işaretlerini, köklerini bulmadan münakaşa ediniz.**

1. $-2x^2 + 7x - 3 = 0.$

$\Delta = 49 - 24 = 25 > 0.$ İki gerçek kök vardır.

$\frac{c}{a} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} > 0$ kökler aynı işaretlidir.

$-\frac{b}{a} = -\frac{7}{-2} = \frac{7}{2} > 0$ Her iki kök pozitiftir.

2. $7x^2 + 11x - 3 = 0.$

a ve c ters işaretlidirler; ters işaretli iki gerçek kök vardır.

$-\frac{b}{a} = -\frac{11}{7} < 0$ olduğundan mutlak değerce büyük olan kök negatiftir.

3. $-9x^2 + 27 = 0.$

a ve c ters işaretlidir; ters işaretli iki kök vardır.

$-\frac{b}{a} = 0$ Kökler simetriktir ($x' = -x''$).

2. **Köklerle katsayılar arasındaki bağıntılar üzerine,**

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

1) $5x^2 + 19x + 7 = 0$ denkleminin kökleri x′ ve x″ ise,

$$x' + x'' = -\frac{19}{5} ;$$

$$x' \cdot x'' = \frac{7}{5} \text{ dir.}$$

2) Toplamı 11 ve çarpımı 24 olan iki sayı bulnuz. Bu sayılar,

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

denkleminin kökleridir. Ve değeri,

$$x' = 3 ; x'' = 8 \quad \text{dir.}$$

3) Kökleri 2 ve —5 olan ikinci derece denklemini kurunuz.

Köklerin toplamı : $-5 + 2 = -3 = -p$

Köklerin çarpımı : $-5 \cdot 2 = -10 = q$ den

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \text{dır.}$$

4) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ denkleminin köklerini bulmadan, bu denklemin köklerinden «3» fazlasını kök kabul eden ikinci derece denklemini kurunuz.

Verilen denklemin kökleri x′ , x″ ve kurulacak denklemin kökleri X′ , X″ ise, probleme göre,

$$X' = x' + 3$$
$$X'' = x'' + 3 \quad \text{dür.}$$

Bu bağıntılar yanyana bir kez toplanır ve bir kez de çarpılırsa,

$$X' + X'' = (x' + x'') + 6 = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$$

$$X' \; X'' = x' \cdot x'' + 3(x' + x'') + 9 = \frac{-5}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} + 9 = 11$$

bulunur. Buna göre aranılan denklem :

$$X^2 - \frac{15}{2}X + 11 = 0 \quad \text{dır.}$$

5) $ax^2+bx+c=0$ denkleminin farklı ve gerçek iki kökü olduğu bilindiğine göre, kökleri bu denklemin köklerinden «h» kadar fazla (veya eksik) bulunan ikinci derece denklemini kurunuz. (Örnek «4» e bakınız ve yeni denklemin genel şekilde ifadesini bulunuz).

b) ÖDEVLER :

**I. Aşağıdaki denklemlerin köklerinin toplamını ve çarpımını söyleyiniz :**

1) $17x^2+14x+3=0$ ; 2) $5x^2+11x-9=0$ ;
3) $3x^2-15x+17=0$ ; 4) $x^2+3x-44=0$.

**II. Aşağıdaki kökleri verilen ikinci derece denklemlerini kurunuz:**

1) $-3$ ve $+7$ ; 2) $\sqrt{5}$ ve $-\sqrt{7}$ ; 3) $-11$ ve $\sqrt{3}$ ;
4) $-2$ ve $1$ ; 5) $-m$ ve $m$ ; 6) $\frac{1}{a}$ ve $a$ ;
7) $m$ ve $m+1$ ; 8) $3$ ve $8$ ; 9) $-5$ ve $11$ ;
10) $2+\sqrt{2}$ ve $2-\sqrt{2}$ ; 11) $\frac{2ab}{a+b}$ ve $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ ; 12) $\frac{a+b}{a-b}$ ve $\frac{a-b}{a+b}$ .

**III. Aşağıdaki toplam ve çarpımları verilen sayı çiftlerini bulunuz:**

| Çarpım | Çarpım | Toplam | Toplam |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 8 | $-105$ |
| 0 | $-9$ | $a\sqrt{5}$ | $a^2$ |
| $1+\sqrt{3}$ | $1-\sqrt{3}$ | $4R$ | $4R^2-9a^2$ |
| $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ | $-\sqrt{6}$ | 70 | 441 |
| $-\frac{47}{7}$ | $\frac{60}{7}$ | 30 | 200 |

**IV. Aşağıdaki denklemlerin köklerinin işaretlerini** (denklemleri çözmeden), **toplamını, çarpımını ve farkını bulunuz :**

1) $12x^2+25x+4=0$; 2) $3x^2+11x-3=0$; 3) $13x^2-11x+2=0$;
4) $5x^2+31x-17=0$; 5) $5x^2-17x+3=0$; 6) $6x^2+15x-21=0$;
7) $4x^2-11x-6=0$; 8) $5x^2+14x+3=0$; 9) $x^2+8x+12=0$;
10) $5x^2-15x-50=0$; 11) $7x^2-14x+7=0$; 12) $5x^2-15x+10=0$;

**V. Aşağıdaki problemleri çözünüz :**

1) «m» ne olmalıdır ki;

$$(m-1)\,x^2 - 2mx + m + 1 = 0$$

denkleminin köklerinin çarpımı «— 2» olsun. $\left(\text{Cevap : } m = \frac{1}{3}\right)$

2) «m» ne olmalıdır ki;

$$mx^2 - (m+1)\,x + 2m + 1 = 0$$

denkleminin köklerinin farkı «1» olsun.

3) «m» ne olmalıdır ki;

$$mx^2 - (4m-1)\,x - 2m - 3 = 0$$

denkleminin köklerinin toplamı $\frac{2}{m} + 1$ olsun. (Cevap : $m = 1$).

4) «m» ne olmalıdır ki;

$$mx^2 - (2m+1)\,x + 4m - 3 = 0$$

denkleminin köklerinin toplamı «4» den küçük olsun. $\left(\text{Cevap : } \begin{matrix} m > 1/2 \\ m < 0 \end{matrix}\right)$

5) «m» ne olmalıdır ki;

$$mx^2 + (2m-1)\,x + 2m + 1 = 0$$

denkleminin kökleri toplamı «1» den büyük olsun.

$\left(\text{Cevap : } 0 < m < \frac{1}{3}\right)$

6) «m» ne olmalıdır ki;

$$mx^2 + (m+2)\,x - (m+3) = 0$$

denkleminin kökledinin kareleri toplamı «17» olsun.

$\left(\text{Cevap : } m = 1 \text{ ve } m = -\frac{2}{7}\right)$

**VI. Aşağıdaki denklemlerde «m» nin değerlerine göre, köklerinin varlığını ve şiaretlerini münakaşa ediniz :**

1) $(m+2)x^2 + 3x + 7 = 0$ ;
2) $2x^2 + 7x + 7m - 3 = 0$ ;
3) $(m-3)x^2 + (2m+5)x + m + 7 = 0$.

**VII. Aşağıdaki problemleri çözünüz:**

1) «m» ne olmalıdır ki;

$$(m-1)x^2-2(m+2)x+m+5=0$$

denkleminin köklerinden biri «3» olsun. Denklemin diğer kökünü, köklerin toplamından (veya çarpımından) faydalanarak bulunuz.

2) «m» ne olmalıdır ki;

$$(2m-3)x^2+(3m+11)x+5+4m=0$$

denkleminin köklerinden biri «—2» olsun. Öteki kökü de bulunuz.

3) «m» ne olmalıdır ki;

$$(3m-1)x^2-2(m-2)x+m=0$$

denkleminin köklerinden biri «7» olsun. Öteki kökü de bulunuz.

4) Kökleri $x'$ ve $x''$ olan $ax^2+bx+c=0$ denklemi veriliyor. Kökleri;

$$1°.\ x_1=3x'+2,\quad x_2=3x''+2;\quad 2°.\ x_1=\frac{1}{x'+2},\quad x_2=\frac{1}{x''+2};$$

$$3°.\ x_1=\frac{2x'+1}{x'-1},\quad x_2=\frac{2x''+1}{x''-1}$$

olan ikinci derece denklemlerini kurunuz.

5) $(m+1)x^2+2(m-3)x+5-m=0$ denklemi veriliyor, «m» ne olmalıdır ki, bu denklemin kökleri arasında,

$$4x'x''+3(x'+x'')=17 \text{ bağıntısı bulunsun.}$$

6) $(m-1)x^2+(2m+3)x+m+1=0$ denklemi veriliyor;

a) «m» nin hangi değerleri için denklemin gerçek kökleri vardır?

b) «m» nin hangi değerleri için köklerden biri diğerinin iki katıdır.

7) «m» ne olmalıdır ki;

$$4x^2-2mx+5=0$$

denkleminin köklerinden biri $-\frac{3}{7}$ olsun. Öteki kökü de bulunuz.

8) «m» ne olmalıdır ki;

$$x^2-8x+m=0 \text{ denkleminde;}$$

1°. $x' = x''$; 2°. $x' = 3x''$; 3°. $x' = \frac{1}{x''}$; 4°. $x'^2 + x''^2 = 0$ olsun.

9) «n» ne olmalıdır ki;

$$(n-1)x^2 - 2(n+1)x + n - 2 = 0$$

denkleminin eşit iki kökü olsun. Bu kökü bulunuz.

10) Kökleri, $x^2 + px + q = 0$ denkleminin köklerinin kareleri olan bir ikinci derece denklemini kurunuz.

11) $5x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin köklerinden $-7$ fazlasını kök kabul eden ikinci derece denklemini kurunuz.

12) «n» ne olmalıdır ki;

$$(2n-1)x^2 + (5n+1)x - (3n+1) = 0$$

denüleminin kökleri arasındaki oran $\frac{3}{2}$ olsun.

13) $x^2 + 3x - 8 = 0$ denkleminin köklerinin terslerini kök kabul eden ikinci derece denklemini kurunuz.

14) $2x^2 - 2(m+1)x - m + 1 = 0$ denklemi veriliyor m yi o suretle seçiniz ki, kökler arasında;

$2x'^2 + 2x''^2 + 3x'x''^2 + 3x'^2x'' = \frac{12}{7}$ bağıntısı bulunsun.

15) $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerinin terslerini kök kabul eden ikinci derece denklemini kurunuz.

16) «a» ne olmalıdır ki;

$x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ denkleminin köklerinden biri ötekinin karesi olsun $\left(\text{Cevap: } a = \frac{3}{2} \text{ ve } a = -\frac{5}{2}\right)$

17) $x' - x'' = m$ olabilmesi için;

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin katsayıları arasında ne bağıntı olmalıdır ?

(Cevap: $b^2 - ac = a^2m^2$)

18) $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri arasında; $mx' + nx'' = p$ olabilmesi için a, b, c arasında ne bağıntı olmalıdır ?

(Cevap : $(ap + nb)(ap + mb) + ac(m - n)^2 = 0$)

19) P ne olmalıdır ki;

$x^2 - Px + 36 = 0$ denkleminde,

1°. $x' = x''$; 2°. $x' = -x''$; 3°. $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$ olsun.

Cevap: 1°. $P = 12$
2°. $P = -12$
3°. $P = 0$
$P = 15$

20) $3x^2 - 10x + c = 0$ denkleminde «c» ne olmalıdır ki;

1°. Her iki kök de pozitif olsun, $\left(\text{Cevap : } 0 < c < \frac{25}{3}\right)$

2°. Kökleri ters işaretli olsun, (Cevap : $c < 0$)

3°. Köklerden biri sıfır olsun, (Cevap : $c = 0$)

4°. Her ik kök de sanal olsun. $\left(\text{Cevap : } c > \frac{25}{3}\right)$

21) $\frac{x}{ax-b} - \frac{1}{bx-a} - 1 = 0$ denkleminin

1°. Kökleri eşit olması için, (Cevap : $a + b = 2$)

2°. Kökleri pozitif olması için, (Cevap : $(a+b)^2 > 2(a+b)$ ve $b(a^2+b^2-2a)(1-a) < 0$)

3°. Kökleri gerçek olması için a ve b arasında ne bağıntı bulunsun?

22) $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek iki kökü varsa; m ne olursa olsun ;

$ax^2+2bx+c+m(ax+b) = 0$ denkleminin ilk gerçek kökü olduğunu gösteriniz.

23) $ax^2+bx+c=0$ denkleminin ik gerçek kökü varsa; m ne olursa olsun;

$$mx^2-bx-m\left(a^2-\frac{ac}{m^2}\right)=0$$

denkleminin de iki gerçek kökü olduğunu gösteriniz.

24) **Aşağıdaki denklemlerin bir ortak kökü olması için m ne olmalıdır? Bu kökleri bulunuz ?**

1°. $x^2-2mx-3=0$; $x^2-2(m+1)x+m=0$ (Cevap: $m=-1$).

2°. $x^2-2x-m=0$; $x^2-mx-2=0$ (Cevap: $m=-1$).

(Bir ortak kökü düşününüz ve denklemleri yanyana çıkarınız).

25) $x^2+px+q=0$ denkleminin köklerinden bir fazlası;

$x^2-p^2x+pq=0$ denkleminin kökleri olacağına göre p ve q yü bulunuz. (Cevap : $q=-1$, $p=1$ ve $p=-2$).

26) $x^2-7x+2m=0$ ve $x^2-5x+m=0$ denklemlerinde «m» yi o suretle seçiniz ki; birinci denklemin köklerinden biri, ikinci denklemin köklerinden birinn iki katı olsun. (Cevap: $m=6$). (Yol gösterme: Köklerin çarpımlarından faydalanarak öteki köklerin eşitliğini görünüz ve sonra bir kökü, köklerin toplamından bulunuz).

27) $ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerinin çarpım ve toplamını kök alan ikinci derece denklemini kurunuz.

(Cevap : $a^2x^2+a(b-c)x-bc=0$)

28) Kökleri ;

$$4x'x''-5(x'+x'')+4=0 \quad \text{ve} \quad (x'-1)(x''-1)=\frac{1}{1+a}$$

bağıntılarını gerçekleyen ikinci derece denklemini kurunuz.

(Cevap : $(1+a)x^2-4x+4-a=0$)

29) Kökleri ;

$x'$ , $x''$ olan $ax^2+bx+c=0$ olan (B) denklemi veriliyor.

Buna göre :

1°. Kökleri $x'+\frac{1}{x'}$ ve $x''+\frac{1}{x''}$ olan $B_1$ denklemini

(Cevap: $acx^2+b(a+c)x+b^2+c^2-ac=0$).

2°. Kökleri, $\frac{x'+1}{x'-1}$ ve $\frac{x''+1}{x''-1}$ olan $(B_2)$ denklemini

(Cevap: $(a+b+c)x^2+2(a-c)x+a+c-b=0$).

3°. Kökleri, $x'^2$ ve $x''^2$ olan $(B_3)$ denklemini kurunuz,

(Cevap: $a^2x^2+(2ac-b^2)x+c^2=0$)

4°. $(B_1)$ in köklerinin eşit olabilmesi,

(Cevap: $a(b^2+4c^2)=b^2c$).

5°. $(B_2)$ nin köklerinden biri ötekinin tersi olabilmesi için gereken bağıntıları bulunuz.

(Cevap: $b=0$ ve $ac<0$).

30) $x^2-2x+m=0$ denkleminde m yi o suretle bulunuz ki, denklemin $x'$ ve $x''$ kökleri arasında;

1°. $x'^2+x''^2=3$; 2°. $x'^2-x''^2=1$; 3°. $x'x''+x'+x''=5$ bağıntıları bulunsun.

31) $x^2+px+q=0$ denkleminde;

1°. $x'=3x''$; 2°. $x'=x''^2$ olabilmesi için p ve q arasındaki bağıntıyı bulunuz.

32) $x^2-7x+m=0$ denkleminde m ne olmalıdır ki, köklerin karelerinin farkı 7 ye eşit olsun.

## 5. ÇÖZÜÜÜMLERİ İKİNCİ DERECEYE GÖTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLER

### A. — İki kareli denklemler

**Tarif. — 1. Genel olarak,** $\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$ **şeklinde yazılabilen, bir bilinmiyenli dördüncü derece denklemlerine iki kareli denklemler denir.**

Burada, bilinmiyenin yalnız çift kuvvetleri bulunur. a, b, c katsayıları ikinci derece denklemindeki şartları sağlarlar.

2. İki kareli denklemler üzerine,

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

1) $3x^4 - 12x^2 = 0$ denkleminin çözümü.

$$3x^2(x^2 - 4) = 0$$

$3x^2 = 0$ dan $x = 0$ (çift kök)

$x^2 - 4 = 0$ dan $x = \mp 2$ bulunur.

2) $x^4 - 625 = 0$ denkleminin çözümü.

$$x^4 = 625, \quad x^2 = \mp 25$$

$x = \mp \sqrt{25} = \mp 25$ (simetrik iki gerçek kök)

3) $16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözümü.

$x^2 = z$ koyalım,

$$16z^2 - 17z + 1 = 0.$$

$z' = 1$ ve $z'' = \frac{1}{16}$ olur.

$x^2 = 1$ ve $x^2 = \frac{1}{16}$ dan

$x = \mp 1$ ve $x = \mp \frac{1}{4}$ bulunur.

Denklemin biri ötekinin simetriği olmak üzere, dört gerçek kökü vardır.

4) $c^4x^4+c^2(a^2-b^2)x^2-a^2b^2=0$ denkleminin çözümü.

$x^2=z$ koyalım,

$$c^4z^2+c^2(a^2-b^2)z-a^2b^2=0,$$

$$z'=\frac{b^2}{c^2} \quad \text{ve} \quad z''=-\frac{a^2}{c^2} \text{ olur.}$$

Bu değerler $x^2=z$ de yerine konulursa,

$$x^2=\frac{b^2}{c^2} \quad \text{den} \quad x=\mp\frac{b}{c} \quad \text{bulunur.}$$

$$x^2=-\frac{a^2}{c^2} \quad \text{için gerçek kökler yoktur.}$$

O halde,

Verilen denklemin simetrik iki gerçek kökü vardır.

5) $8x^4-12x^2+3=0$ denkleminin köklerini bulmadan, köklerinin sayısını ve işaretlerini münakaşa ediniz.

$\Delta'=36-24>0$ olduğundan, $8z^2-12z+3=0$ denkleminin gerçek ve farklı iki kökü vardır.

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{8}>0 \quad \text{olduğundan bu iki kök aynı işaretlidir.}$$

$$-\frac{b}{a}=\frac{12}{8}>0 \quad \text{olduğundan da bu iki kök pozitiftir.}$$

O halde,

İki kareli denklemin, ikişer ikişer simetrik dört gerçek kökü vardır.

b) ÖDEVLER:

**I. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:**

1) $x^4-12x^2+35=0$;
2) $3x^4+6x^2-9=0$;
3) $8x^4-12x^2+4=0$;
4) $x^4+2x^2-15=0$;
5) $4x^4-15x^2=0$;
6) $\frac{4}{3}x^4-2(x^2-1)=\frac{8}{9}-2x^2+3x^4$;
7) $x^4-5x^2+4=0$;
8) $6x^4+8x^2+1=0$;
9) $4x^4+28x^2+49=0$;
10) $9x^4+5x^2-4=0$;

11) $\left[\frac{x}{x-1}\right]^2+\left[\frac{x}{x+1}\right]^2=\frac{10}{9}$ [Cevap: $x=\mp\frac{1}{2}$; $x=\mp i\sqrt{5}$]

12) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{19x}{12}=0$; 13) $\frac{x^2}{x^2-6}-\frac{7}{2}=-\frac{x^2}{x^2+9}$;

14) $(x^4+x^2+1)^2-38(x^4+x^2+1)+105=0$;

15) $(a+1)x^4-10ax^2+9a-1=0$;

16) $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)=0$; Cevap: $x=\mp(a+b)$ $x=\mp(a-b)$

17) $m^2n^2x^4-(m^4+n^4)x^2+m^2n^2=0$;

Cevap: $x=\mp\frac{m}{n}$, $x=\mp\frac{n}{m}$.

18) $(x-a)^2-\frac{2a}{(x-a)^2}=a-2$ (Cevap: $x=a\mp\sqrt{a}$; $x=a\mp i\sqrt{2}$).

**II. Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerinin sayısını ve işaretlerini münakaşa ediniz.**

1) $5x^4-13x^2+4=0$;
2) $x^4-5x^2+1=0$;
3) $2x^4+7x^2-12=0$;
4) $x^4-8x^2+16=0$;
5) $3x^4+7x^2+1=0$;
6) $15x^4+3x^2-52=0$.

## B. — Köklü denklemler

**1. Tarif. — Bir denklemde, bilinmiyenli terim kök işareti altında bulunuyorsa, bu denkleme «köklü denklem» denir.** Böyle bir denklemin çözümü, birinci veya ikince derece denklemi çözümüne götürülebilirse, bu denkleme birinci veya ikinci dereceden köklü denklem adı verilir. Köklü denklemlerin çözümü için, denklemde :

İçinde bilinmiyen bulunan köklü terim bir tane ise, bu terim denklemin bir yanında yalnız bırakılır. Her iki yan, kök kuvvetine yükseltilir ve benzer terimler sadeleştirilir. Böylece köklü denklem, rasyonel bir denklem haline getirilir. Bu rasyonel denklemin kökleri, verilen köklü dnklemin kökleri olabilir.

İçinde bilinmiyen bulunan köklü terim sayısı birden fazla ise, gerekli yükseltme işlemleri yapılır ve böylece köklü terim sayısı bire indirilerek denklem çözülür.

Yalnız, her iki yanın karesini almak suretiyle elde edilen denklemin köklerinin hepsi, ilk denklemi sağlamıyabilir. Çünkü, verilen köklü denklemin birinci yanı «P», ikinci yanı «Q» ile gösterilirse, denklem $P = Q$ şeklinde yazılabilir. İki yanın karesi alınırsa, $P^2 = Q^2$ olur. $P^2 - Q^2 = 0$ yazılır ve çarpanlarına ayrılırsa; $(P + Q)(P - Q) = 0$ şeklini alır. Bu denklemin kökleri $P = Q$ ve $P = -Q$ olduğu halde, $P = -Q$ çözümünün $P = Q$ denklemine uymayacağı aşikârdır. Bu münakaşa genel olarak, ya verilen denklemi çözmeğe başlamadan denklem üzerinde yapılır, veya çözümünden sonra bulunan köklerin denklemi sağlayıp sağlamadığına bakmak suretiyle yapılır.

**2. Köklü denklemler üzerine,**

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

1) $\sqrt{x-7} - 2 = 0$ denkleminin çözümü.

Köklü terim yalnız bırakılır, $\sqrt{x-7} = 2$ olur. İki yanın karesi alınırsa, $x - 7 = 4$ ve buradan, $x = 11$ bulunur

Sağlama. — $x = 11$ değeri verilen denklemde yerine konulursa, $2 - 2 = 0$ nümerik eşitliği elde edilir.

2) $5 + \sqrt{4x^2 + 5} = 2x$ denkleminin çözümü.

Köklü terim yalnız bırakılır,

$$\sqrt{4x^2+5} = 2x-5 \quad (1).$$

her ik yanın karesi alınırsa,

$$4x^2+5 = 4x^2-20x+25,$$
$$20x = 20$$
$$x = 1 \qquad \text{bulunur.}$$

Sağlama. — $x = 1$ değeri verilen denklemde yerine konulursa;

$5 + 3 \neq 2$ elde edilir. Burada verilen denklemin çözümü yoktur, denilir. $x = 1$ ancak $5 - \sqrt{4x^2+5} = 2x$ denkleminin köküdür.

Münakaşa, sağlama yapılmaksızın, diğer bir metodla da yapılabilir. Bu denklemin her kökü, kök içini pozitif yapmak mecburiyetindedir. O halde (1). denkleminin birinci yanı pozitif olmalıdır. Birinic yan pozitif olunca ikinci yanın da pozitif olması gerekir.

O halde; $4x^2+5>0$ ve $2x-5>0$ olmalıdır. $4x^2+5$ ; x ın bütün değerleri için pozitiftir. $2x-5>0$ olması için $x>\frac{5}{2}$ olmalıdır. Yukarıda bulunan «$x=1$» kökü, $\frac{5}{2}$ den küçük olduğundan, denklemi sağlamaz.

3) $x-\sqrt{2(3x-1)}=3$ denkleminin çözümü.

Kök yalnız bırakılır,

$$\sqrt{2(3x-1)}=x-3$$

ve her iki yanın karesi alınırsa,

$$2(3x-1)=x^2-6x+9$$

$x^2-12x+11=0$ ve buradan,

$x'=11$ ve $x''=1$ bulunur.

Sağlama. — $x=11$ verilen denklemin köküdür. $x=1$ ise, işlem neticesi araya girmiş olup, denklemi sağlamaz. Ancak $x+\sqrt{2(3x-1)}=3$ denklemini sağlar. Ayrıca verilen denklem ancak $2(3x-1)\geq 0$ ve $x-3>0$ eşitsizliklerini sağlıyan değerler için mümkündür. Bunun için, $x\geq\frac{1}{3}$, ikinci için $x>3$ olması gerekir. Kolayca görüleceği üzere, söz konusu her iki eşitliği birden sağlıyan $x>3$ değerleri, ancak verilen denklemi sağlar. Yukarıda bulunan $x=1$ değerinin bu yönden de verilen denklemin kökü olmadığı gösterilmiş olur.

4) $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-3}=6$ denkleminin çözümü.

Denklemin kökleri, $2x-3>0$ ve $x+3>0$ eşitsizliklerini birden sağlamalıdır. Yani $x>\frac{3}{2}$ olmalıdır.

Her iki yanın karesi alınırsa,

$$x+3+2\sqrt{(x+3)(2x-3)}+2x-3=36,$$

$$3x+2\sqrt{(x+3)(2x-3)}=36$$

olur. Kökü terim yalnız bırakılırsa,

$$2\sqrt{(x+3)(2x-3)}=3(12-x)$$ elde edilir.

Bu denklemin çözülebilmesi için ise, $x < 12$ olmalıdır (denklemin ikinci yanına bakınız). O halde verilen, asıl denklemin kökleri $\frac{3}{2}$ ile 12 arasında bulunmalıdır. Bu sonuncu denklemin iki yanının karesi alınır.

$$4(2x^2+3x-9)=9(144-24x+x^2)$$

ve sadeleştirilirse, $x^2-228x+1332=0$ ve buradan:

$x'=6$ ye $x''=222$ bulunur.

$x' = 6$ verilen denklemi sağlar; $x'' = 222$ ise, 12 den büyük olduğundan «yabancı köktür» denklemi sağlamaz.

b) ÖDEVLER :

1) $3x-14-\sqrt{5x-12}=2$;
2) $2x-\sqrt{x^2+6x+6}=8$;
3) $x+\sqrt{5x+10}=0$;
4) $\sqrt{28-2x}=\sqrt{21+x}+1$;
5) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8}=3$;
6) $\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}=\sqrt{5x-27}$;
7) $\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}=\sqrt{3x}$;
8) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{6x+7}$;
9) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x-6}$
10) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5-8x}=\sqrt{4x+7}$;
11) $\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1$;
12) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$;
13) $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2$;
14) $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$;
15) $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}}=\frac{13}{6}$;
16) $3x+\sqrt{6x+10}=35$;
17) $x-\sqrt{4-x^2}=1$;
18) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x+5}=7$;
19) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}=1$;
20) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{4x+5}$;
21) $2\sqrt{3x+1}+3\sqrt{5x-4}=4\sqrt{6x+1}$;
22) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{12x+13}$;
23) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}+\sqrt{3x+4}$.

## C. — Yardımcı bilinmiyen kullanma suretiyle çözümleri, ikinci derece denkleminin çözümüne götürülebilen denklemler

1. Bazı denklemlerin, iki kareli denklem olmadıkları halde, yardımcı bilinmiyen kullanılmak suretiyle çözümleri, ikinci derece denkleminin çözümüne götürülebilir.

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

$x^2-x-18+\frac{72}{x^2-x}=0$ denkleminin çözümü.

$x^2-x=z$ (1) konulursa;

$z-18+\frac{72}{z}=0$ veya,

$z^2-18z+72=0$ elde edilir.

Bu denklemin kökleri,

$z'=6$; $z''=12$ (1) de yerine konulursa.

$x^2-x-6=0$

$x^2-x-12=0$ denklemleri elde edilir.

Bu denklemlerin kökleri sırasıyle,

$x_1'=3$; $x_2''=-2$; $x'=4$; $x''=-3$ tür.

2) $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30$ denkleminin çözümü.

$\sqrt{2x^2+3x+9}=z$ (1) konulursa,

$2x^2+3x+9=z^2$ veya $2x^2+3x-3=z^2-12$

elde edilir. Bu suretle;

$z^2-12+z=30$ ve buradan,

$z^2+z-42=0$ denklemi bulunur.

Bu denklemin kökleri. $z'=-7$; $z''=6$ (1) de yerine konulursa,

$2x^2+3x-40=0$

$2x^2+3x-27=0$ denklemleri elde edilir.

Bu denklemlerin kökleri, $x = \frac{-3+\sqrt{329}}{4}$; $x'' = \frac{-3-\sqrt{329}}{4}$;

$x_1' = 3$; $x_2'' = -\frac{9}{2}$ dir.

3) $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{19}{4}$ denkleminin çözümü.

$x-\frac{1}{x}=z$ (1) konur ve karesi alınırsa;

$x^2+\frac{1}{x^2}-2=z^2$ veya $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+2$ bulunur.

$x^2+\frac{1}{x^2}$ nin bu değeri verilen denklemde yerine konulursa,

$$3(z^2+2)-4z=\frac{19}{4} \quad \text{veya}$$

$12z^2-16z+5=0$ elde edilir. Bu denklemin kökleri,

$z'=\frac{1}{2}$ ve $z''=\frac{5}{6}$ (1) de yerine konulursa,

$x-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ den $2x^2-x-2=0$

$x-\frac{1}{x}$ den $6x^2-5x-6=0$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin kökleri de sırasiyle;

$x'=\frac{3}{2}$, $x''=-\frac{2}{3}$, $x_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{17}}{4}$ tür.

b) ÖDEVLER:

1) $4\sqrt[3]{x}-\frac{20}{\sqrt[3]{x}}=11$; 2) $(x^2-7x+3)^2+10(x^2-7x+3)+21=0$;

3) $(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x+3)+24=0$;

4) $(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x^2})^2=159600$ $\left(\begin{array}{c} x=16,\quad x=25 \\ \text{Cevap: } x=\frac{1}{2}(-39\mp i\sqrt{79})\end{array}\right)$

5) $3\sqrt{1+x}-2\sqrt[4]{1+x}=8$ ; 6) $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$;

7) $x^2-3x+5\sqrt{x^2-3x+76}=260$ ;

8) $2x^2-15x+5+\sqrt{2x^2-15x+11}=0$ ;

9) $x^2+x=3\sqrt{x^2-x-2}$; 10) $\sqrt{x^2+x+37}=\frac{7}{25}[x^2+(x+1)^2]$ ;

11) $x^5+\frac{x^4}{2}-\frac{3x^3}{4}-\frac{3x^2}{8}+\frac{x}{16}+\frac{1}{32}=0$ ;

12) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=0$, $\left[\text{Cevap: } x=0,\ x=\mp\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$

13) $2x-x^2+\sqrt{6x^2-12x+7}=0$ ; 14) $x^2+x+1-\frac{42}{x^2+x}=0$ ;

15) $(6x^2+2)^2-11(6x^2+2)+28=0$ ;

16) $\left[\frac{3x+4}{5x-2}\right]^2-67\cdot\frac{3x+4}{5x-2}=6710$ ;

17) $\frac{120}{x^2+8x+16}+\frac{11}{x+4}=17$ ;

## D. — Üslü ve logaritmik denklemlerin çözümü (*)

**1. Tarif. — a ve b, pozitif sabit sayılar olmak şartiyle, genel olarak, $a^x = b$ şeklinde yazılabilen denklemlere ÜSLÜ denklemler denir.** «x» burada üs olup bilinmiyendir. Böyle bir denklemi çözmek için denklemin iki yanının logaritması alınır.

$$x\cdot\log a=\log b \quad \text{ve buradan,}$$

$$x=\frac{\log b}{\log a} \quad \text{bulunur.}$$

(*) Bu kısım müfredat programındda yoktur. Öğretmen lüzum görür ve imkân bulursa — öğrencilerine sormamk üzere — okutabilir.

**2. Üslü ve logaritmik denklemler üzerine,**

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

1) $(42{,}59)^x = 0{,}2987$ denkleminin çözümü.

İki yanın logaritması alınırsa,

$$x = \frac{\log 0{,}2987}{\log 42{,}59} \quad \text{elde edilir.}$$

$\log 0{,}2987 = \bar{1}{,}4752$ ve $\log 42{,}59 = 1{,}62931$ den

$$x = \frac{\bar{1}{,}57524}{1{,}62931}$$

dır. Logaritma özelliğinden,

$\bar{1}{,}47524 = -1 + 0{,}47524 = -0{,}42476$ olduğu düşünülürse,

$$x = -\frac{0{,}52476}{1{,}62931} = 0{,}322 \quad \text{bulunur.}$$

2) $(4^{3-x})^{2-x} = 1$ denkleminin çözümü.

İki yanın logaritmasını alalım,

$$(2-x)\log 4^{3-x} = 0 \quad \text{olur.}$$

Bu eşitliğin gerçekleşmesi için,

$$2-x = 0 \quad (1) \quad \text{ve}$$

$$\log 4^{3-x} = 0 \quad (2) \quad \text{olmalıdır.}$$

(1) denkleminden x için $x = 2$ elde edilir.

(2) denklemi ise, $(3-x) \cdot \log 4 = 0$ şeklinde yazılabilir. $\log 4 \neq 0$ olduğundan, x için, $x = 3$ bulunur. Buna göre verilen denklemin $x' = 2$ ve $x'' = 3$ olmak üzere iki kökü vardır.

(3) $(a^x)^x = (a^8)^2$ denkleminin çözümu.

Her iki yanın logaritması alınırsa,

$$x^2 \cdot \log a = 16 \cdot \log a$$

$$x^2 = 16$$

bulunur. Ve buradan, verilen denklem için, $x' = 4$ ve $x'' = -4$ kökleri elde edilir.

4) $3^{x+2}+9^{x+1}= 810$ denkleminin çözümü.

Denklem, $3^2 . 3^x + 9 . 9^x = 810$ şeklinde yazılır ve 9 ile her iki yan bölünürse,

$$3^{2x}+3^x-90=0 \quad \text{olur.}$$

Burada; (1) $3^x = z$ koyalım;

$$z^2+z-90=0 \quad \text{denkleminden,}$$

$$z_1=9 \quad \text{ve} \quad z_2=-10 \quad \text{elde edilir.}$$

z yerine (1) den değeri düşünülürse;

$$3^x = 9 \quad \text{dan} \quad x = 2 \quad \text{bulunur.}$$

$$3^x = -10 \quad \text{için çözüm yoktur.}$$

O halde verilen denklemin kökü $x = 2$ dir.

5) $3^{2x}. 5^{2x-3} = 7^{x-1} . 4^{x+3}$ denkleminin çözümü.

Her iki yanın logaritmasını alalım.

$2x . \log 3+(2x-3) . \log 5=(x-1) . \log 7+(x+3) . \log 4.$

Parantezler açılır ve logaritma özellikleri gözönünde tutulursa;

$x . \log 9+x . \log 25-\log 125=x . \log 7-\log 7+x . \log 4+\log 64$

veya,

$x(\log 9+\log 25-\log 7-\log 4)=\log 125+\log 64-\log 7$

yazılır. Buradan;

$$x.\log\frac{9.25}{7.4} = \log \frac{125.64}{7} \quad \text{veya}$$

$$x=\frac{\log\frac{8000}{7}}{\log\frac{225}{28}}=\frac{\log 8000-\log 7}{\log 225-\log 28}$$

$\log 8000 = 3{,}90309$, $\log 7 = 0{,}84510$, $\log 225 = 2{,}35218$, $\log 28 = 1{,}44716$ dan,

$$x = \frac{3{,}90309 - 0{,}84510}{2{,}35218 - 1{,}44716} = \frac{3{,}05799}{0{,}00502} = 3{,}367 \quad \text{bulunur.}$$

O halde, verilen denklemin kökü $x = 3{,}367$ dir.

6) $\log x + \log y = 2 \quad (1)$

$x^2 + y^2 = 425 \quad (2)$ logaritmik denklem sisteminin çözümü.

(1) denklemi logaritma tarif ve özelliğinden,

$$x \cdot y = 10^2 \quad (3)$$

şeklinde yazılabliir. (2) denklemi ise,

$$(x + y)^2 - 2xy = 425$$

veya (3) denklemi gözönünde tutulmak suretiyle,

$$(x + y)^2 = 625$$

şeklinde yazılabilir. Buradan :

$$x + y = \mp 25 \quad (4)$$

bulunur. $x + y = 25$ ise, verilen sistemi sağlıyan x ve y nin değerleri,

$$X^2 - 25X + 100 = 0$$

denkleminin kökleridir. Buradan ;

$$X_1 = x_1 = 20 \quad \text{ve} \quad X_2 = y_2 = 5$$

kökleri bulunur. $x + y = -25$ ise,

$$X^2 + 25X + 100 = 0 \quad \text{denkleminden ;}$$

$$X_1 = x_1 = -5 \quad \text{ve} \quad X_2 = y_2 = -20 \quad \text{bulunur.}$$

Negatif sayıların logaritmaları alınamıyacağı için, son bulunan $x = -5$ ve $y = -20$ değerleri, verilen sistemi sağlamaz. Bu bakımdan verilen sistemin ancak bir çözümü vardır.

$$x = 20 \quad \text{ve} \quad y = 5$$

7) $\log (2x - 5) + \log (3x + 8) = \log 17$

denkleminin çözümü.

Denklem, $\log(2x-5)(3x+8) = \log 17$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$(2x-5)(3x+8) = 17 \quad \text{veya,}$$

(A) $6x^2 + x - 57 = 0$ ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri, $x_1 = 3$ ve $x_2 = -\frac{19}{6}$ dir.

Yalnız, verilen denklemde $2x-5$ ve $3x+8$ terimlerinin logaritmalarının alınabilmesi için, bu terimlerin pozitif olması gerekir; yani $2x-5 > 0$ ve $3x+8 > 0$ olmalıdır. Birinci eşitsizliği sağlıyan $x > \frac{5}{2}$ değeri ikinci eşitsizliği de sağlar. Bu bakımdan (A) denkleminin kökleri içinde $\frac{5}{2}$ den büyük olan 3 değeri, verilen logaritmik denklemi sağlar. O halde verilen logaritmik denklemin kökü $x = 3$ tür.

8) $16^x + 16^{1-x} = 10$ denkleminin çözümü.

Denklem, $16^x + \frac{16}{16^x} = 10$ şeklinde yazılır ve $16^x = z$ (1) konursa,

$$z + \frac{16}{z} = 10 \quad \text{ve buradan,}$$

$$z^2 - 10z + 16 = 0$$

elde edilir. Bu denklemin kökleri,

$z_1 = 8$ ve $z_2 = 2$ dir. «z» nin bu değerleri (1) de yerine konulursa;

$16^x = 8$ den, $x = \frac{\log 8}{\log 16} = \frac{0{,}90309}{1{,}20412} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$

$16^x = 2$ den, $x = \frac{\log 2}{\log 17} = \frac{0{,}30103}{1{,}20412} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$ bulunur.

O halde; verilen denklemin kökleri $x = \frac{1}{4}$ ve $x = \frac{3}{4}$ tür.

b) ÖDEVLER :

**I. Aşağıdaki üslü denklemleri çözünüz :**

1) $(0{,}491)^x = 213$ ; 2) $4^x = 256$ ;

3) $7^x = 343$ ; 4) $10^x = 100000$ ;

5) $(10^{5-x})^{6-x}=10^2$ ; 6) $3^{2x-7}=405$ ; 7) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{64}$ ; 8) $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{81}{256}$;

9) $\left(3\frac{1}{2}\right)^x=\frac{7}{8}$ ; 10) $5^{4x^2-2x-1}=437$ ; 11) $(0{,}008)^x=0{,}2$;

12) $(0{,}125)^x=0{,}5$ ; 13) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-5}=\left(\frac{5}{4}\right)^{5x-2}$ ; 14) $5^{2x}\cdot 625=26\cdot 5^{x+1}$;

15) $(0{,}02)^{3/5x}=(0{,}000004)^{7/9^{x+13}}$ ; 16) $(0{,}45)^{x-7}=1$ ;

17) $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x}$ ;

18) $\sqrt[x]{a}=a^x$ (Cevap: $x=1$ ve $x=-1$); 19) $\sqrt[x]{9977}=2{,}511$ ;

20) $\sqrt[5x+4]{12}=1{,}318$ ; 21) $(0{,}5^{12})^x=(0{,}0624)^8$ ;

22) $2^x+4^x=272$ (Cevap: $x=4$); 23) $3^{x+1}+3^{x-2}-3^{x-3}+3^{x-4}=768$;

24) $n^{2x+3}=n^{8-3x}$; 25) $3^x+3^{x-1}+3^{x-2}-3^{x-3}+3^{x-4}=363$ (Cevap: $x=5$);

26) $3^{2x}-26\cdot 3^x-27=0$ ; 27) $2\cdot 4^{2x+2}-31\cdot 4^{x+1}=16$ ;

28) $3^{x+1}+3^{x-2}-\frac{15}{3^{x-1}}=\frac{247}{3^{x-2}}$ (Cevap: $x=3$) ;

29) $\sqrt{a^{7x-3}}\cdot\sqrt[3]{a^{x+1}}\cdot\sqrt[4]{a^{5x+7}}\cdot\sqrt[5]{a^{7-2x}}=1$ ; 30) $n^{2x-3}\cdot P^{-4x+5}=R^{-6x+7}$ ;

41) $\sqrt[x+2]{32^{2x+1}}=\sqrt[4x-1]{4^{6x-1}}$ ; 32) $\sqrt[x-1]{8}=16^{x+2}$ ;

33) $3^x:\sqrt[x]{3}=81:\sqrt[4]{3}$ .

**II. Aşağıdaki logaritmik denklemleri çözünüz:**

1) $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$ ;

2) $2\log x-\log 324=5\log\frac{3x}{2}$ ;

3) $\log\sqrt{5x+8}+\frac{1}{2}\cdot\log(2x+3)=\log 15$;

4) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3$;

5) $\log\frac{2x}{3}=2\cdot\log(x-1)-\log\left(\frac{3x}{4}+2\right)$ ;

6) $5 \log x - \log 288 = 3 \log \frac{x}{2}$ (Cevap: $x = +6$);

7) $3 \log x = \log (x-1) + 2 \log (x+1)$ ;

8) $\log x^2 - \frac{12}{\log x} = 5$ ;

9) $\log x + \log (x+3) = \log 4$ ;

10) $\log \sqrt{x+1} + \log \sqrt{x-1} = \log 4$ ;

11) $\log \sqrt{x-2} - \log \sqrt{x+2} = 1$;

12) $\log (x+2) - \log (x-2) = \log x$ ;

13) $\log x = 2 \cdot \log 18 - 4 \cdot \log 12$ ;

14) $\log x = \log 24 - \log 8$ ;

15) $\log (2x-1)^2 + \log (3x-1)^2 = 2$.

## 6. İKİNCİ DERECE PROBLEMLERİ

6) Toplamı 28 ve çarpımı 195 olan ik sayı bulunuz.

2) Bir tüccar 150 liraya bir miktar kumaş satın alıyor. Bu kumaşın bir kısmını, metrede 3 lira kazanmak suretiyle, 162 liraya satıyor. Satış sonunda tüccarın elinde 1 metre kumaş kaldığı bilindiğine göre, kumaşın uzunluğu ne kadardır ? (Cevap : 10).

3) Bir sayının $\frac{1}{3}$ ünün 5 fazlasiyle, $\frac{1}{3}$ ünün 5 eksiğinin çarpımı 119 dur. Bu sayıyı bulunuz.

4) Kadın ve erkek 15 kişi bir otelde yemek yiyorlar. Bütün erkekler 36 lira, bütün kadınlar da 36 lira ödüyorlar. Her kadının, bir erkekten 2 lira eksik ödediği bilindiğine göre, kadın ve erkeklerin sayılariyle; bir kadının ve bir erkeğin ödediği parayı bulunuz.

5) Bir tüccar 60 liraya bir miktar kumaş satın alıyor. Eğer aynı paraya karşılık 3 metre fazla alsaydı her metre kendisine 1 lira eksiğine mal olacaktı; satın aldığı kumaş kaç metredir ?

6) Birçok kimse birlikte ve eşit hisselerle 1080 liralık bir borcu ödeyeceklerdir. Aralarında iki kişi hisselerini ödiyemediklerinden, ötekilerinin her birinin borcu 90 lira artıyor. Kaç borçlu var ? (Cevap : 6).

7) 400 lira birkaç kişi tarafından paylaşılacaktır. Paylaşma anında 4 kişi çekiliyor. Böylece ötekileri 5 lira fazla almış oluyorlar. Paylaşmadan önce kaç kişi vardı ? (Cevap : 20).

8) Bir havuz iki musluk tarafından doldurulabiliyor. Yalnız birinci musluk aktığında havuzun dolması, yalnız ikinci musluk aktığından 22 dakika daha uzun sürmekeditr. İki musluk birlikte akarsa havuz bir saatta dlmaktadır. Musluklar ayrı ayrı aktıkları zaman havuzu ne kadar zamanda doldururlar ?

9) Birkaç çocuk arasında 840 ceviz bölüşülüyor. Eğer bu çocuklardan her biri ikişer ceviz eksik alsaydı, her birine bölüme ortaklaşan çocukların sayısı kadar ceviz düşecekti. Çocukların sayısı ne kadardır ? (Cevap : 28)

10) Bir çiftlik sahibi 750 liraya bir miktar koyun alıyor. Bunları üç ay besledikten sonra her birini kendine mal olduğu fiyattan 6 lira fazlasına satıyor. 3 ay içinde 5 koyun öldüğüne göre ve bu yüzden 30 lira ziyan edildiğine göre, koyunların sayısını ve her birinin fiyatını bulunuz. (Cevap : Koyun sayısı 25; fiyat 30 L.)

11) Bir tüccarın iki fıçı şarabı vardır. Birinci fıçının hacminin ikincininkine oranı 5/4 tür. Birinic şarabın litresinin fiyatı içindeki litre sayısı kadar 20 paralık ve ikinci fıçıdakinin litresi ise, birincideki şarabın litresinden 45 kuruş daha ucuzdur. İki fıçıdaki şarapların toplam değeri 43010 kuruştur. Fıçıların hacımlariyle her fıçıdaki şarabın litresinin fiyatını bulunuz.

Cevap :

Birinci fıçıda 230 lt. ve fiyatı 150 kr.

İkinci fıçıda 184 lt. ve fiyatı 90 kr.

12) Bir çocuğun 3 yıl sonraki yaşı bir tam kare olacaktır. Şimdiki yaşından 3 yıl önceki yaşı, tam kare olan yaşının kare köküne eşit olduna göre, çocuğun yaşı nedir ? (Cevap : 6).

13) Kare kökünün 6 katına kendi eklenince 27 çıkan sayı nedir ? (Cevap : 9).

14) Ardarda gelen öyle 3 tamsayı bulnuz ki çarpımları, toplamlarının 5 katına eşit olsun.

15) Ardarda gelen öyle iki tek sayı bulunuz ki, karelerinin farkı 8000 olsun. (Cevap : 1999; 2001).

16) Öyle 3 sayı bulunuz ki, ayni bir sayının 3; 2 ve 5 katı olsunlar ve karelerinin toplamı 342 olsun (Cevap : Sayıları; $\mp 9$; $\mp 6$; $\mp 15$).

17) Bir kesirin pay ve paydasının çarpımı 120 dir. Paya 1 eklenir ve paydadan da «1» çıkarılırsa, bulunan sayılar birbirine eşit oluyor.

Buna göre bu kesir nedir? $\left(\text{Cevap: } \frac{10}{12}\right)$

18) Bir orantıda birinci terim ikinciden 6 fazla ve üçüncü terim dördüncüden 5 fazadlır; ve terimlerin karelerinin toplamı, 793 olduğuna göre orantıyı kurunuz.

19) Üç rakkamlı bir sayıda, rakkamlarının toplamı, 15; iki uctaki rakkamlarının çarpımı da 15 ve rakkamlar tersine yazıldığında elde edilen sayı aranılan sayıdan 198 fazladır. Bu sayı nedir ?

20) Bir demir borunun ağırlığı 70 kg; ikinci bir demir borunun ağırlığı 120 kg olup, uzunluğu birinciden 3 m fazla ve her metresinin ağırlığı da birincininkinden 2 kg fazladır. Bu boruların uzunluklarını ve birer metrelerinin ağırlığını bulunuz.

## HAREKET PROBLEMLERİ

21) Ayrı iki yerden birinin hızı saatte 40 km, ötekinin hızı saatte 60 km olan iki otomobil birbirine karşı ve aynı doğru boyunca harekete geçiyorlar. Bu iki otomobilin harekete başladıkları anda aralarındaki uzaklık, bunların birleşinceye kadar geçirdikleri zamanı gösteren sayının tersinin 3600 katı kadar km dir. Bunlar harekete başlayınca bir uçak bunlardan biriyle beraber 240 km hızla harekete geçiyor ve doğru boyunca gittikten sonra karşıdan gelen öteki otomobili görünce tekrar ters yöne dönüyor. Bu hal otomobiller karşılaşıncaya kadar devam ettiğine göre, uçağın ne kadar yol aldığını bulunuz ?

(Cevap : 1440 km).

22) İki otomobil 360 km lik bir yolu almak üzere ayni anda hareket ediyorlar. Hareket noktaları ayni ve birincinin hızı ikincininkinden 15 km/ saat fazladır. Birincisi gidecek yere ikinciden iki saat önce vardığına göre, otomobillerin hızları nedir? (Cevap : $v_1 = 60$ km/sa, $v_2 = 45$ km/ sa).

23) İki yolcuayni zamanda A ve B şehirlerinden hareket ediyorlar. Birbirlerine rastladıkları anda birinci ikinciden 12 km fazla yol almış

oluyor. Ayni hızı muhafaza edrek birincisi B şehrine, rastladıkları andan $4\frac{2}{3}$ saat ve ikincisi A şehrine rastladıkları andan $7\frac{5}{7}$ saat sonra varıyor. İki şehir arasındaki uzaklık ne kadardır ? (Cevap : 96 km).

24) Bir şehirden 90 km uzakta bulunan öteki bir şehire gitmek üzere iki koşucu ayni anda harekt ediyorlar. Bunlardan biri saatte ötekinden «1» km fazla koşuyor ve şehire «1» saat önce varıyor. Her koşucunun hızı nedir? (Cevap : $v_1 = 10$ km/sa; $v_2 = 9$ km/sa).

25) Aralarındaki uzaklık 320 km olan iki şehirden, karşılıklı olmak üzere iki araba hareket ediyor. Birinci araba bir günde ötekinden 8 km fazla yol alıyor. Bunlar ikincinin bir günde aldığı yolun yarısını gösteren sayı kadar gün yolculuk ediyorlar. Bunların birbirine rastlamadan önce aldıkları yolları bulunuz. (Cevap : 1. ci 192 km; 2. ci 128 km).

26) Bir kayık 28,5 km lik yol boyunca bir nehirin akış doğrultusunda ilerliyor. Sonra 22,5 km geri dönüyor. Böylece 8 saat geçiyor. Nehirin akıntı hızının saatte 2,5 km olduğu bilindiğine göre bu kayığın sudaki hızı nedir ? (Cevap : $v = 27$ km/sa).

27) Çevresi 360 m olan bir daire çevresi üzerinde iki cisim hareket ediyor. Birinci her saniyede ikinciden 4 m daha fazla yol alıyor ve daire çevresini «1» saniye daha az zamanda dolaşıyor. Her birinin hızı nedir ?

(Cevap : $v_1 = 40$ m/sn; $v_2 = 36$ m/sn).

28) Merkezleri, birbirini dik olarak kesen iki eksen üzerinde bulunan iki daire başlangıç noktasına doğru hareket ediyorlar. Birinci dairenin yarıçapı 6 cm, hızı 7 cm/sn ve harekete başladığı anda, başlangıç noktasına merkezinin uzaklığı 2248 cm dir. İkinci dairenin yarıçapı ise, 4 cm olup, hızı 5 cm/sn ve merkezinin harekete başlama anında, başlangıç noktasına olan uzaklığı 1606 cm dir. Ne kadar zaman sonra bu daireler birbirlerine dıştan teğet olurlar ? (Cevap : 320 sn).

29) İki sehir arasındaki uzaklık 588 km dir. Bir tren bu uzaklığı saatte, bilinmiyen ,ortalama bir hızla alıyor. Trenin bu hızı saatte 10,5 km. fazlalaştığında bu uzaklığı bir saat önce alabildiği bilindiğine göre, trenin ortalama hızını hesap ediniz.

## FAİZ PROBLEMLERİ

30) Bir adam 50000 lirayı belli bir faiz fiyatiyle faize yatırmıştır. Bir yıl sonra kapitali ve faizi alarak hepsini birden birinci faiz fiyatından 0,5 daha fazla olan bir faiz fiyatiyle faize veriyor. Ve böylece bir yılda 2612,5 lira faiz alıyor. İlk fiyatı nedir? (Cevap : % 4,5).

31) 1500 liralık bir kapital % 4 faiz fiyatiyle belli bir süre faizde kalmıştır. Sürenin sonunda kapital ve faiz çekilerek % 5 fiyatiyle, bu kez önceki süreden $\frac{1}{2}$ yıl daha fazla bir zaman faize veriliyor. Bu ikinci kez 247,5 lira faiz alındığına göre, birinci süreyi hesap ediniz. (Cevap : 5/2 yıl).

32) Bir tüccar bir miktar para ile mal satın alıyor ve % 5 de masraf yapıyor. Bu malı 504 liraya satıyor ve alış fiyatının onda birinin yüzdesi kadar kâr ediyor. Alış fiyatı nedir ? (Cevap : 354,4 lira).

## GEOMETRİ PROBLEMLERİ

33) Yarçıpaı 15 m olan bir dairenin merkezinden 25 m uzaklıkta bir P noktası alınıyor ve bu noktadan daireye bir teğet çiziliyor. Teğetin uzunluğunu bulunuz. (Cevap : 20 m).

34) Bir ABC üçgeninde BC = a dır. BC üzerinde öyle bir D noktası bulunuz ki, D den AC ye çizilen paralel, üçgeni iki eşdeğerli parçaya ayırsın.

$$\left(\text{Cevap: } \overline{BD} = x = \frac{a}{2}\sqrt{2}\right).$$

35) Yarıçapı R olan bir dairenin AB çapının ayırdığı bir yarım daire veriliyor. Çapın uzantısı üzerindeki bir P noktasından daireye PC teğeti çiziliyor. C değme noktasının çap üzerindeki izdüşümü D olsun. PC = CD + DB olduğuna göre, D nin merkeze olan OD = x uzunluğunu hesap ediniz.

$$\left(\text{Cevap: } x = R\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

36) Bir A noktasından O merkezli bir daireye öyle bir kesen çiziniz ki, kesenin dışta kalan parçası, içtekine eşit olsun. Problemi irdeleyiniz ve çözüm şartını bulunuz. $\left(\text{Cevap: } x = \frac{\sqrt{a^2-R^2}}{2}\right)$.

37) R yarıçaplı bir dairenin C noktasından AB çapı üzerine CD diki indiriliyor ve şekil bu çap etrafında döndürülüyor. CA yayı ile CA kirişinin meydana getirdiği parçanın dönmesi ile hasıl olan hacim, CDO üçgeninin dönerek meydana getirdiği koninin hacmine eşit olduğu bilindiğine göre AD yi hesaplayınız. Cevap : $\overline{AD} = x = R\,(2 - \sqrt{2})$.

38) Çevresi 2p ve üç kenarının kareleri toplamı $2a^2$ olan dik üçgenin kenarlarını hesap ediniz.

## FİZİK PROBLEMİ

39) 0,5 yoğunluğunda bir cisimden bir silindir yapılıyor. Ve bu silindirin 1/4 boyunda daha ağır bir cisimden ayni tabanda ikinci bir silindir yapılarak taban tabana birleştirildikten sonra birlikte su içine atılıyorlar. Silindirin üst yüzü suyun yüzü ile çakışık durumdadır. İkinci silindirin yapıldığı cismin yoğunluğu yüksekliğinin 3 katını gösteren sayı kadardır. Silindirlerin boyları ne kadardır? (Cevap : Silindirlerin yükseklikleri 1 ve 4 cm. olup, 1 cm. lik silindirin yoğunluğu 3 tür).

40) (U) şeklinde kıvrılmış bir borunun bir yanı kaplıdır. Boruya cıva konuluyor. Denge durumunda kapalı kolda 76 cm cıva basıncı altında 10 $cm^3$ hava bulunmaktadır. Açık kola 25 $cm^3$ cıva dökülüyor. Bu halde kollardaki cıva seviyeleri farklı olacaktır. Buna göre kapalı yandaki havanın yeni hacmı ile maruz kalacağı yeni basınç nedir? (Borunun kesiti 1 $cm^2$ dir.) (Cevap : $V' = 7{,}85\ cm^3$; $P' = 99{,}7$).

## BEŞİNCİ BÖLÜM

## İKİNCİ DERECE ÜÇTERİMLİSİNİN İŞARETİ - EŞİTSİZLİKLER

**1. Tarif.** — x değişken ve a, b, c sabit sayılar olmak üzere,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

cebirsel ifadesine İKİNCİ DERCE ÜÇTERİMLİSİ denir.

Bu üçterimliyi sıfıra eşit kılmak suretiyle elde edilen denklemin köklerine bu üçterimlinin kökleri denir.

**2. İkinci derece üçterimlisinin çarpanlarına ayrılması ve işaret değişiminin incelenmesi.**

A. $b^2 - 4ac > 0$ olsun;

$a^2 + bx + c$ üçterimlisi;

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

şeklinde yazılır.

Kökler x′ ve x″ ile gösterilirse,

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{ve} \quad x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

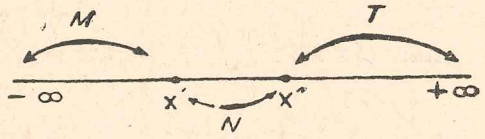
idi. Bu değerler yukarıda yerlerine konulursa, üçterimli;

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a[x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x''] \\ &\text{»} \quad = a[x^2 - x'x - x''x + x' \cdot x'') \\ &\text{»} \quad = a[x(x - x') - x''(x - x')] \\ &\text{»} \quad = a(x - x')(x - x'') \end{aligned} \tag{I}$$

çarpanlarına yarılmış olur. Bu halde, x değişkenine verilecek değerler x′ ve x″ köklerine göre üç farklı durumda bulunurlar. ($x' < x''$ olsun).

**a°) x değişkenine verilen değerler «x′» den küçük olsun.** (Şek. 5) de «M» bölgesinde «x» değişkenine verilen bu değerler «x″» den de kü-

çüktürler. Buna göre (1) ifadesinde $(x - x')$ ve $(x - x'')$ çarpanlarının her ikisi de negatif olacaklarından üçterimlinin işareti «a» çarpanının işaretinin aynı olur.




Şekil : 5

**b°) x değişkenine verilen değerler kökler arasında olsun.** (Şek. 5) de «N» bölgesinde «x» değişkenine verilen bu değerler için (I) ifadesindeki $(x - x')$ ve $(x' - x'')$ çarpanlarından birincisinin işareti pozitif, ikincisininki negatif olacağından, üçterimlinin işareti, «a» çarpanın işaretinin tersi olur.

**c°) x değişkenine verilen değerler «x″» den büyük olsun.** (Şek. 5) de «T» bölgesinde «x» değişkenine verilen bu değerleri «x′» den de büyüktürler. Bu halde (I) ifadesindeki $(x - x')$ ve $(x - x'')$ çarpanlarının ikincisininki negatif olacağından, üçterimlinin işareti, «a» çarpanının işaretinin aynı olur.

İŞARETLER TABLOSU

| x | $x - x'$ | $x - x''$ | 3 ter. linin işareti |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | − | − | a'nın işaretinin aynı |
| $x'$ | 0 | | |
| | + | − | a'nın işaretinin tersi |
| $x''$ | | 0 | |
| $+\infty$ | + | + | a'nın işaretinin aynı |

**ÖRNEKLER :**

1. $f(x) = x^2 - 13x + 30$ üçterimlisinin işaret değişimi. Üçterimlinin kökleri «3» ve «10» dur. $a = 1 > 0$ olduğuna göre :

a) «$-\infty$» dan «3» ve 10 dan «$+\infty$) a kadar «x» in bütün değerleri için f(x) pozitiftir.

b) «3» ve «10» arasında «x» in bütün değerleri için f(x) negatiftir.

2. $f(x) = -2x^2+3x+2$ çüterimlisinin işaret değişimi. Bu üçterimlinin kökleri «$-\frac{1}{2}$» ve «2» dir. $a = -2 < 0$ olduğuna göre :

a) Kökler dışında $\left(x>2 \quad \text{ve} \quad x<-\frac{1}{2}\right)$ $f(x)$ negatiftir.

b) Kökler arasında $\left(-\frac{1}{2}<x<2\right)$ $f(x)$ pozitiftir.

B. $b^2-4ac=0$ olsun;

$ax^2+bx+c$ üçterimlisi (I) ifadesine göre :

$$ax^2+bx+c=a(x-x')^2$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır.

Burada «x» değişkeninin x' den başka bütün değerleri için $(x-x')^2$ çarpanı daima pozitif olduğundan «x» değişkenine $x=-\frac{b}{2a}$ kökünden başka ne değer verilirse verilsin, üçterimlinin işareti, «a» çarpanının işaretinin aynı olur.

ÖRNEK :

$f(x) = 4x^2-12x+9$ üçterimlisinin işaret değişimi.

$\Delta = 36-36 = 0$. Üçterimliyi sıfır yapan çift kök $x'=x''=\frac{3}{2}$ dir.

$a = 4 > 0$ olduğuna göre, üçterimlinin işareti; $x=\frac{3}{2}$ den başka x'in bütün değerleri için pozitiftir.

C. $b^2-4ac<0$ olsun;

$ax^2+bx+c$ üçterimlisini,

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ şeklinde yazar ve

parantez içine, ilk iki terimi tam kare haline getirmek üzere, $\frac{b^2}{4a^2}$ yi bir defa ekler ve bir defa da çıkarırsak,

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

elde edilir. Veyahut;

$$a^2x+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$b^2-4ac<0$ olduğundan, $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

pozitiftir ve $-\frac{b}{2a}$ dan başka «x» ın bütün değerleri için $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ de pozitiftir. Bu halde «x» değişkenine ne değer verilirse verilsin, büyük parantez içi daima pozitif olacağından üçterimlinin işareti, «a» çarpanının işaretinin aynı olur.

ÖRNEK :

$f(x) = -3x^2 + 2x - 1$ üçterimlisinin işaret değişimi.

$$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0, \quad a = -3 < 0$$

olduğuna göre; «x» ın bütün değerleri için üçterimli negatiftir.

UYGULAMA. — İkinci derece üçterimlisinin yukarıda yazılan son şekli gözönünde tutulursa :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}\right)^2\right]$$

yazılabilir.

Bu sonuncu ifade çarpanlarına ayrılırsa :

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

bulunur.

Üçterimlinin bu şekilde çarpanlarına ayrılmasından faydalanarak, ikinci derece denkleminin köklerini veren formülü - yeniden - çıkarınız.

## İKİNCİ DERECE PARAMETRİK DENKLEMLERİN İNCELENMESİ

**2. Verilen bir sayının, bir ikinci derece üçterimlisinin köklerine göre, yeri.**

(Karşılaştırma ve münakaşa).

Bu ikinci derece üçterimlisinin (veya denkleminin) köklerini hesabetmeksizin, bu köklere göre, verilen bir sayının yeri bulunabilir. Yani verilen sayının:

a) Küçük kökten küçük olduğu,

b) Büyük kökten büyük olduğu,

c) Köklerin arasında bulunduğu belirtilebilir.

Verilen sayı $\alpha$ olsun. Üçterimliyi $f(x) = ax^2 + bx + c$ ile ve $x = \alpha$ için üçterimlinin aldığı değeri de $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ ile gösterelim. (Daima $x' < x''$ alacağız).

1°. $f(\alpha)$, a ile ters işaretli, yani $a \cdot f(\alpha) < 0$ ise; kökler arasındaki bütün değerleri için $f(x)$ üçterimlisinin işareti a katsayısının işaretinin tersi olduğundan, $\alpha$ sayısı kökler arasındadır, $(x' < \alpha < x'')$.

2°. $f(\alpha)$, a ile aynı işaretli yani $a \cdot f(\alpha) > 0$ ise; x in kökler dışındaki bütün değerleri için $f(x)$ üçterimlisinin işareti, a katsayısının işaretinin aynı olduğundan, $\alpha$ sayısı kökler dışındadır. Bu takdirde $\alpha$ köklere göre iki durumda olabilir: $\alpha$ sayısı ya küçük kökten küçüktür veya büyük kökten büyüktür. Bunu belirtmek için $\alpha$ kökler toplamının yarısı olan $-\frac{b}{2a}$ ile mukayese edilir.

a. $\alpha < -\frac{b}{2a}$ veya $\alpha + \frac{b}{2a} < 0$ ise, $\alpha$ sayısı küçük kökten küçüktür. $(\alpha < x' < x'')$.

b. $\alpha > -\frac{b}{2a}$ veya $\alpha + \frac{b}{2a} > 0$ ise, $\alpha$ sayısı büyük kökten büyüktür. $(x'' < x'' < \alpha)$.

3°. $f(\alpha) = 0$ ise, $\alpha$ sayısı verilen üçterimlinin köküdür.

**Not.** — 1. Mukayesenin yapılabilmesi için üçterimlinin iki gerçek kökü $(\Delta > 0)$ olmalıdır. Neden ?

2. $x' < \frac{x'+x''}{2} < x''$ veya $x' < -\frac{b}{2a} < x''$ olduğunu gösteriniz.

Buradan $\alpha$ sayısının, $f(\alpha) > 0$ halinde, $-\frac{b}{2a}$ ile mukayese edilmesi sebebini düşününüz.

ÖRNEKLER :

1. $-3$ sayısı ile $2x^2 + 7x - 60 = 0$ denkleminin köklerinin mukayesesi (denklemi çözmeksizin).

Denklemde a ile c ters işaretlidir; denklemin iki gerçek kökü vardır.

$\alpha \,.\, f(\alpha) = 2 \,.\, f(-3)$ kurulursa;

$2 \,.\, f(-3) = 2[2(-3^2 + 7(-3) - 60] = -126 < 0$ bulunur.

Sonuç negatif olduğuna göre, $-3$ sayısı köklerin arasında bulunur.

2. $-1$ sayısı ile $-4x^2 + 3x + 1 = 0$ denkleminin köklerinin mukayesesi.

Denklemin iki kökü vardır. (Neden?)

$$a \,.\, f(\alpha) = -4 \,.\, f(-1) = -4(-4-3+1) = 24 > 0$$

olduğuna göre, $-1$ sayısı kökler dışındadır. $-1$ in büyük kökten büyük veya küçük kökten küçük olduğunu belirtmek için, $-1$ sayısı $-\frac{b}{2a}$ ile mukayese edilir.

$-\frac{b}{2a} = \frac{3}{8}$ dir. Burada $-1 < \frac{3}{8}$ olduğundan,

$-1$ sayısı küçük kökten küçüktür $(-1 < x' < x'')$.

**3. Verilen iki sayının, bir ikinci derec üçterimlisinin köklerine göre yerleri.**

Verilen sayılar $\alpha$ ve $\beta$ olsun. Yukarda gösterilen usul, bu sayıların her ikisine de ayrıca uygulanabilir. Fakat ard arda $f(\alpha)$ ve $f(\beta)$ yı teşkil ederk problem, aşağıda görüleceği üzere, daha kolay bir şekilde çözülebilir.

1°. $f(\alpha) \,.\, f(\beta) < 0$ olursa, denklemin farklı iki kökü vardır Neden? O halde $(\alpha)$ ve $(\beta)$ sayılarından yalnız biri üçterimlinin kökleri arasın-

da bulunur Eğer $f(\alpha)$ nın işareti $(\alpha)$ nın işaretinin aynı ise $\alpha$ kökler arasında değildir ; $\alpha < \beta$ farzedilirse $\alpha$ ve $\beta$ sayılarının köklere göre durumu;

$$\alpha < x' < \beta < x'' \text{ dır.}$$

2°. $f(\alpha) . f(\beta) > 0$ olup, $f(\alpha)$ ve $f(\beta)$ nın iaşretleri a nın işaretinin tersi ise üçterimlinin gerçek ve farklı iki kökü vardır. Neden? Öyle ise $\alpha$ ve $\beta$ sayıları bu köklerin arasındadır.

$$x' < \alpha < \beta < x'' \text{ dır.}$$

3°. $f(\alpha)$ ve $f(\beta)$ nın işaretleri a nın işaretinin aynı ise, üçterimlinin gerçek kökleri olup olmadığı bilinemez. Bunun için $b^2 - 4ac$ teşkil edilir. Bu kemiyet negatif ise kökler yoktur; sıfır ise $-\frac{b}{2a}$ ya eşit bir kök mevcut olur ki, bu derhal $\alpha$ ve $\beta$ sayılariyle mukayese edilebilir.

$b^2 - 4ac > 0$ ise, üçterimlinin iki gerçek kökü olup, $\alpha$ ve $\beta$ sayıları bu köklerin arasında bulunamaz. Şu halde kökler ve kökler arasında bulunan $-\frac{b}{2a}$ sayısı, $\alpha$ ve $\beta$ ya nazaran aynı durumda bulunurlar. O halde $\alpha$ ve $\beta$ sayıları $-\frac{b}{2a}$ ile mukayese edilerek bu sayıların köklerin dışındaki yerleri belirtilir.

ÖRNEKLER :

1. 0 ve $-1$ sayılariyle $2x^2 - 3x - 1 = 0$ denkleminin köklerinin mukayesesi.

$f(0)$ ve $f(-1)$ kurulursa; $f(0) = -1$ ve $f(-1) = +4$ bulunur. Burada, $f(0) . f(-1) < 0$ olduğundan, $2x^2 - 3x - 1 = 0$ denkleminin iki gerçek kökü vardır. 0 ve $-1$ sayılarından yalnız biri denklemin köklerinin arasında bulunur. $f(-1)$ in işareti $a = 2$ nin işaretinin aynı olduğundan, $-1$ sayısı köklerin dışındadır. $-1 < 0$ olduğu gözönünde tutulursa, $-1$ ve 0 sayılariyle köklerin durumu : $-1 < x' < 0 < x''$ dir.

2. $-3$ ve $+1$ sayılariyle $2x^2 + 7x - 10 = 0$ denkleminin köklerinin mukayesesi.

$f(-3)$ ve $f(1)$ kurulursa, $f(-3) = -13$ ve $f(1) = -1$ bulunur. Burada, $f(-3) . f(1) > 0$ olduğu gibi, $f(-3)$ ve $f(1)$ in işaretleri $a = 2$ nin

işaretinin tersi olduklarından $2x^2+7x-10=0$ denkleminin gerçek iki kökü vardır. Neden? O halde $-3$ ve 1 sayıları kökler arasındadır. Yani,

$$x' < -3 < 1 < x'' \quad \text{dir.}$$

3. $-2$ ve 5 sayılariyle $x^2-5x+9=0$ denkleminin köklerinin mukayesesi.

$f(-2)$ ve $f(5)$ kurulursa, $f(-2)=+20$ ve $f(5)=+6$ bulunur. Burada, $f(-2).f(5)>0$ olduğu gibi, $f(-2)$ ve $f(5)$ in işaretleri $a=+1$ in işaretinin aynı olduklarından, denklemin gerçek kökleri olduğu hemen bilinemez.

$$\Delta = b^2-4ac = 25-24 > 0$$

olduğundan, denklemin iki gerçek kökü vardır. O halde $-2$ ve 5 sayıları kökler arasında bulunamazlar. Neden? Köklerin toplamının yarısı olan $-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$ sayısı ile $-2$ ve 5 sayılarının durumları mukayese edilerek;

$$-2 < x' < x'' < 5$$

olduğu neticesine varılır. Neden ?

4. m nin çeşitli değerlerine göre, $f(x)=(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ denkleminin köklerini 2 sayısı ile mukayese ediniz.

(Bu şekildeki denklemlere ikinci derece parametrik denklemleri denir; burada m parametredir.)

1) $\Delta$ kurulur;

$$\Delta = 16m^2-4(m-5)(m-2)=4(3m^2+7m-10).$$

$m=1$ ve $m=-\frac{10}{3}$ için $\Delta=0$ olur.

2) $a.f(\alpha)$ kurulur;

$$a.f(2)=(m-5)[(m-5).4-4m.2+m-2]=(m-5)(-3m-22)$$

$m=5$ ve $m=-\frac{22}{3}$ için $a.f(\alpha)=0$ olur.

3) $a+\frac{b}{2a}$ kurulur;

$$\alpha+\frac{b}{2a}=2+\frac{-4m}{2(m-5)}=2-\frac{2m}{m-5}=\frac{-10}{m-5} \quad \text{olup,}$$

$\alpha + \frac{b}{2a} = \frac{-10}{m-5}$ kesirinde, pay negatif olduğundan, işaret incelenmesinde sadece paydanın işareti incelenir ve payın değişmeyen işaretini de gözönünde tutarak, kesirin işareti tesbit edilir.

4) Tablo düzenlenir :

| m | $+\infty$ | $-\frac{22}{3}$ | | $-\frac{10}{3}$ | | 1 | | $5+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | + | | + | 0 | − | 0 | + | + |
| a.f (2) | − | 0 | + | | | | + | 0 − |
| $\alpha + \frac{b}{2a}$ | | | + | | | | + | |
| | $x' < 2 < x''$ | | $x' < x'' < 2$ | | | | $x' < x'' < 2$ | $x' < 2 < x''$ |

Tablodan anlaşılacağı üzere ;

$m < -\frac{22}{3}$ için $x' < 2 < x''$

$-\frac{22}{3} < m < -\frac{10}{3}$ » $x' < x'' < 2$,

$1 < m < 5$ » $x' < x'' < 2$,

$m > 5$ » $x' < 2 < x''$.

5. m nin değerlerine göre, $f(x) = (m+1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ denkleminin köklerini $-1$ sayısı ile karşılaştırınız.

1) $\Delta = 4[4m^2 - (m+1)(2m+3)] = 4(2m^2 - 5m - 3)$

$\Delta$, m ye göre ikinci dereceden bir üçterimlidir. Kökleri : $m = 3$ ve $m = -\frac{1}{2}$ dir. $m = 3$ ve $m = -\frac{1}{2}$ için $\Delta = 0$ olur.

2) $a \cdot f(\alpha) = (m+1).f(-1) = (m+1)(m+1+4m+2m+3)$

$= (m+1)(7m+4)$

$m = -1$ ve $m = -\frac{4}{7}$ için $a \cdot f(\alpha) = 0$ olur.

2°. $f(\alpha)$, ile aynı işaretli yani $a \cdot f(\alpha) > 0$ ise; x in kökler dışındaki

3) $\alpha + \frac{b}{2a} = -1 + \frac{-4m}{2(m+1)} = \frac{-3m-1}{m+1}$.

Önce, küçük bir tablo düzenlemek suretiyle, bu kesirin işareti incelenir.

| m | $-\infty$ | $-1$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3m-1$ | + | | + | 0 | − | |
| $m+1$ | − | 0 | + | | + | |
| $\alpha + \frac{b}{2a}$ | − | | + | | − | |

4) Esas tablo düzenlenir :

| m | $-\infty$ | $-1$ | | $-\frac{4}{7}$ | | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | + | | + | | + | | − | 0 | + |
| a . f(−1) | + | 0 | − | 0 | + | | | | + |
| $\alpha + \frac{b}{2a}$ | − | | + | | + | | | | − |
| | $-1<x'<x''$ | | $x'<-1<x''$ | | $x'<x''<-1$ | | | | $1<x'<x''$ |

6. m nin değerlerine göre; $f(x) = x^2 - 2(3m+2)x + 6m = 0$ denkleminin köklerinin 0 ve 1 sayılarına nazaran yerlerini belirtiniz.

Önce f(0) ve f(1) i teşkil edelim. $f(0) = 6m$ ve $f(1) = -3$ olduğundan, f(1) daima negatiftir. Şu halde denklemin daima gerçek kökleri vardır. Tablo düzenlenirse,

| m | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f(0) | − | 0 | + |
| f(1) | − | | − |
| | $x'<0<1<x''$ | | $0<x'<1<x''$ |

bulunur. Görüldüğü üzere birinci bölgede «0» ve «1» sayıları kökler arasındadır; ikinci bölgede ise «0» kökler dışında, «1» kökler arasındadır.

b) **Ödevler :**

1. $f(x) = x^2 - 5x + 3 = 0$ denkleminin köklerini $-2$; 4 ve 5 sayıları ile ayrı ayrı mukayese ediniz.

2. $f(x) = x^2 - 7x - 1 = 0$ denkleminin köklerini $-1$; 3 ve 8 sayıları ile ayrı ayrı mukayese ediniz.

3. $f(x) = 4x^2+20x+5 = 0$ denkleminin köklerini $-6$; $-3$ ve 1 sayıları ile ayrı ayrı mukayese ediniz.

4. $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ denklemi veriliyor;

a. m parametresini o şekilde belirtiniz ki bir kök sıfır olsun; buna göre öteki kökü bulunuz.

b. Bu denklemin daima farklı iki kökü olduğunu gösteriniz.

c. Köklerden birinin 1 den büyük, ötekinin 1 den küçük olması için m hangi değerleri almalıdır ? $\left(\text{Cevap: } \begin{matrix} m>0 \text{ ve} \\ m<-4 \end{matrix}\right)$

5. $(m-2)x^2+2(m-1)x+m-3 = 0$ denklemi veriliyor;

a. m nin hangi değerleri için bu denklemin iki gerçek kökü vardır?

b. Her iki kökün 1 den büyük olabilmesi için m hangi sınırlar arasında olmalıdır ?

6. $4x^2+(m-1)x+m-5=0$ denklemi veriliyor. Bu denklemin iki gerçek kökü olması ve her ikisinin de 2 den küçük bulunması için m hangi sınırlar arasında olmalıdır ?

7. $(m-2)x^2-2(m+3)x+4m = 0$ denklemi veriliyor; m nin hangi değerleri için köklerden biri 3 den büyük ve öteki 2 den küçüktür ?

8. $4x^2-2x+m = 0$ denklemi veriliyor; m nin hangi değerleri için denklemin $-1$ ve 1 arasında iki gerçek kökü vardır ?

9. $(2m+3)x^2+(m+1)x+4 = 0$ denklemi veriliyor;

a. Denklemin her iki kökünün $-1$ ile 2 arasında olabilmesi için m ne olmalıdır ?

b. Köklerden birinin negatif ötekinin pozitif olabilmesi için m yi bulunuz.

10. m nin değerlerine göre 1 ve 2 sayılarını, $x^2-6(m-1)x+12m+5=0$ denkleminin kökleriyle mukayese ediniz.

11. m nin değerlerine göre $-1$ ve 1 sayılarını ayrı ayrı olarak ; $(3m+2)x^2+(m-1)x+4m+3=0$ denkleminin kökleriyle mukayese ediniz.

12. Aşağıdaki denklemlerin köklerini m nin değerlerine göre, —1 ve 1 sayılariyle ayrı ayrı mukayese ediniz.

a. $mx^2 + (2m - 1)x + 1 = 0$

b. $(m - 1)x^2 - 2)(m - 2)x - 7m - 1 = 0$

c. $a(x+1)^2 + b(x-1)^2 - 2m(x^2+1) = 0$ $(a > b)$ dir.

13. $(m + 2)x^2 - 2(m - 2)x + m + 2 = 0$ denklemi veriliyor. m nin değerlerine göre — 3 sayısını bu denklemin kökleriyle mukayese ediniz.

14. $(2m + 1)x^2 + (2m - 3)x + 3m - 1 = 0$ denklemi veriliyor; m nin değerlerine göre 1 sayısını denklemin kökleriyle mukayese ediniz.

15. $(2-5m)x^2 + (3m - 4)x + 5 + 2m = 0$ denklemi veriliyor; m nin değerlerine göre —2 ve 1 sayılarını denklemin kökleriyle ayrı ayrı mukayese ediniz.

16. m nin değerlerine göre; $(1-m)x^2 - 2(3+m)x - (1+3m) = 0$ denkleminin köklerini 4 ve —1 sayılariyle ayrı ayrı mukayese ediniz.

17. $x^2 + 2(2m - 1)x + 3m^2 - 3 = 0$ denklemi veriliyor;

a. Köklerin gerçek olabilmesi için m ne olmalıdır ?

b. 1 sayısının kökler arasında olabilmsei için m nin değerlerini belirtiniz.

18. $(m + 3)x^2 - (m - 1)x + 6m - 2 = 0$ denkleminin iki pozitif kökü olabilmesi için m ne olmalıdır ?

19. m nin hangi değerleri için, $(m-1)x^2 - (m-5)x + m - 1 = 0$ denkleminin her iki kökü —1 den büyük olur ?

20. m nin hangi değerleri için; $(1-m)x^2 + 4x(m-2) + 2(2-m) = 0$ denleminin kökleri :

a. 2 sayısından küçük,

b. —1 ve 6 arasında bulunur ?

21. m nin hangi değerleri için —2 sayısı, $mx^2 - (1 - m)x - 2m = 0$ denkleminin kökleri arasındadır.

22. $(m+1)x^2 + (m^2 - m - 2)x + m - 2 = 0$ denklemi veriliyor; m yi o şekilde belirtiniz ki, + 1 sayısı denklemin kökleri arasında bulunsun ?

23. m nin hangi değerleri için; $(m + 1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$ denkleminin köklerinden bir 2 den büyüktür ?

24. m nin hangi değerleri için, $(m - 1)x^2 - (3m + 1)x + 5m = 0$ denkleminde;

a. 1 sayısı kökler arasındadır ?

b. 1 sayısı küçük kökten de küçüktür ?

25. $(m-4)x^2-2(m-2)x+m-3=0$ denülemi veriliyor; m nin değerlerine göre, bu denklemin 0 ile 1 arasındaki köklerinin sayısını irdeleyiniz ?

26. m yi o şekilde belirtiniz ki, $3x^2+(m-1)x+3m+2=0$ denkleminin köklerinden biri 3 den büyük, öteki 2 den küçük olsun.

27. m yi o şekilde belirtiniz ki, $(m-2)x^2+2(m+3)x+4m=0$ denkleminin köklerinden biri 5 ve $\frac{2}{3}$ sayıları arasında ve öteki bu aralığın dışında kalsın ?

28. m yi o şekilde belirtiniz ki, $(m-6)x^2-4(m-1)x+m-3=0$ denkleminin kökleri $-1$ ve 1 sayıları arasında bulunsun ?

29. m nin değerlerine göre, $(m-1)x^2-2(3m+1)x+9m=0$ denkleminin kökleriyle $-1$ ve 0 sayılarını büyüklük sırasiyle düzenleyiniz.

30. $x^2-2(m+3)x+4=0$ denkleminin kökleriyle 1 ve 2 sayılarını büyüklük sırasiyle düzenleyiniz (m nin değerlerine göre).

31. m nin değerlerine göre, $3x^2-(m-1)x+3m+2=0$ denkleminin kökleriyle 2 ve 3 sayılarını mukayese ediniz.

32. $y=x^2-2mx+m+2$ üçterimlisinin tam kare olabilmesi için m ne olmalıdır? (Yol gösterme: diskrimanantı sıfıra eşit kılınız).

33. $y=(m+1)x^2+mx+m$ üçterimlisinin x ne olursa olsun, daima pozitif kalması için m hangi değerleri almalıdır ?

34. $(m+1)x^2-2(m-1)x+3(m-1)$ üçterimlisinin x ne olursa olsun, daima negatif kalması için m hangi değerleri almalıdır ?

35. $x^2-(8m-2)x+15m^2-2m-7$ üçterimlisi veriliyor;

1°. Üçterimlinin x ne olursa olsun daima pozitif kalması için m ne olmalıdır ?

2°. Üçterimliyi sıfıra eşit kılarak elde edilecek denklemin, köklerinin kareleri toplamının 24 e eşit olabilmesi için m ne olmalıdır ?

### 4. Bir bilinmiyenli ikinci derece eşitsizlikleri.

**1. Tarif. — Bütün terimleri bir yana alınıp gerekli sadeleştirme yapıldıktan sonra ;**

$$\boxed{ax^2+bx+c\lesseqgtr 0}$$ **şekilerinde**

**yazılabilen ifadelere ikinci dereceden Bir Bilinmiyenli Eşitsizlikler denir.** a, b, c sabit sayılardır ve $a\neq 0$ dır.

**2. Bir bilinmiyenli ikinci derece eşitsizliğinin çözümü.** — Bir ikinci derec eşitsizliğini çözmek için, bu ikinci derece üçterimlisinin işareti incelenir ve sonra eşitsizliği sağlıyan değişken aralığı belirtilir.

**3. Bir bilinmiyenli ikinci derece eşitsizlikleri üzerine,**

a) ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

1. $-4x^2 + 9x + 9 < 0$ eşitsizliğinin çözümü.

Birinci yan bir üçterimlidir ve «$x^2$» nin katsayısı $a = -4 < 0$ dır. Üçterimlinin kökleri $x' = -\frac{3}{4}$ ve $x'' = 3$ tür. Üçterimlinin negatif, yani «a» nın işaretinin aynı olması istenildiğine göre, kökler dışında «x» ın bütün değerleri için eşitsizlik sağlanır.

Yani $x < -\frac{3}{4}$ ve $x > 3$ olmalı.

2. $9x^2 + 2 > 3x$ eşitsizliğinin çözümü.

Üçterimlinin diskrimanantı $\Delta = 9 - 72 = -63 < 0$ dır. Üçterimlinin gerçek kökleri olmadığından işareti, daima $a = 9$ un işaretinin aynı; yâni pozitif kalır. Verilen eşitsizliğin de pozitif olması istenildiğine göre, bu eştsizlik «x» ın bütün değerleri için sağlanır.

3. $(x^2 - x - 12)(-4x^2 - 3x + 1) < 0$ eşitsizliğinin çözümü.

Birinci üçterimlinin kökleri $x' = -3$ ve $x'' = 4$

İkinci üçterimlinin kökleri $x' = -1$ ve $x'' = \frac{1}{4}$ tür.

«x» ın muhtelif değerlerine göre, çarpımın işaretini inceleyebilmek için çarpanlardan her birinin işareti incelenir. Bunun için bir tablo düzenlemek faydalıdır.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $\frac{1}{4}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x - 12$ | + | 0 | − | | − | | − | 0 | + | | |
| $-4x^2 - 3x + 1$ | − | | − | 0 | + | 0 | − | | − | | |
| Çarpımın işareti | − | ⋮ | + | ⋮ | − | ⋮ | + | ⋮ | − | | |

Tabloda çarpımın pozitif olduğu bölgeler taranırsa, eşitsizliği sağlıyan «x» in değişim sınırları doğrudan doğruya,

$$x>4; \quad -1<x<\frac{1}{4}; \quad x<-3 \text{ elde edilir.}$$

4. $x^2+x-6<0$

$x^2+3x-3>0$

eşitsizlik takımını aynı zamanda gerçekliyen «x» in değerlerinin bulunması.

Birinci üçterimlinin kökleri 2 ve —3 olduğundan, üçterimliyi negatif yapan «x» in değerleri bu köklerin arasındadır; yani $-3 < x < 2$. İkinci üçterimlinin kökleri ise 1 ve —4 bulunduğundan, üçterimliyi pozitif yapan «x» in değerleri bu köklerin dışındadır; yani $x<-4$ ve $x>1$. Bu duruma göre, her ik eşitsizliği birden gerçekliyen «x» in değerleri 1 ve 2 sayıları arasındadır; yani $1 < x < 2$.

5. $\dfrac{4x^2-12x+5}{x^2-5x+4}<0$ eşitsizliğin çözümü.

Eşitsizlik, pay ve payda ters işaretli olduklarında gerçeklenir. Papin kökleri,

$\frac{1}{2}$ ve $\frac{5}{2}$ ; paydanın kökleri 1 ve 4 tür. İşaret tablosu :

| x | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{5}{2}$ | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pay | + | 0 — | — | 0 + | | + |
| Payda | + | + | 0 — | — | 0 | + |
| Bölüm. İşa. | + | — | + | — | | + |

Taranmamış bölgeler eşitsizliği gerçekliyen bölgelerdir. Yani :

$$\frac{5}{2}<x<4 \text{ ve } \frac{1}{2}<x<1 \quad \text{olmalıdır.}$$

b) ÖDEVLER :

**I. Aşağıdaki üçterimlileri çarpanlarına ayırınız :**

1) $x^2-9x+18$ ; 2) $x^2+3x-28$ ; 3) $2x^2-12x-18$;

4) $2x^2-3x-2$ ; 5) $-x^2+10x-2$ ; 6) $5x^2-11x-2$ ;

7) $2x^2-(2\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}$; 8) $x^4+5x^2+6$ ; 9) $x^4-x^2-6$ ;

10) $x^4-6x^2+5$.

**II. Aşağıdaki kesirli ifadeleri sadeleştiriniz :**

1) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$ : 2) $\dfrac{x^2+(\sqrt{2}-1)x-2\sqrt{2}}{x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}}$ ; 3) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$

4) $\dfrac{(x^2-3x-4)(x^2-4x-5)}{(x^2-1)(x^2-x-20)}$ ; 5) $\dfrac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$ : 6) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+5}$

7) $\dfrac{x^2-2a^2x+2a^2b-b^2}{x^2-(a^2+b)x-2a^4-2b^2+5a^2b}$ ; 8) $\dfrac{2x^2-2x-12}{x^2+x-12}$ .

**III. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz :**

1) $x^2>4$ ; 2) $7x^2<3x$ ; 3) $x^2-6x+5<0$ ;

4) $-x^2+6x-9>0$ ; 5) $2x^2-5x-12<0$ ;

6) $3x^2-x-3<0$ ; 7) $2x^2+5x-12<0$ ;

8) $6x^2-17x+5>0$ ; 9) $-x^2+4x+1>0$ ;

10) $2x^2-x+3>0$ ; 11) $9x^2-6x+1>0$ ;

12) $6x^2+2x+5<0$ ; 13) $8x^2-3x>0$ ;

14) $-3x^2-7x+10<0$ ; 15) $8x-x^2-20<0$ .

**IV. Aşağıda çarpım halinde bulunan eşitsizlikleri çözünüz :**

1) $(x^2-x-2)(-5x^2-5x+30)>0$ ;

2) $(3x^2+5x-2)(9-x^2)(3x^2-5x-2)>0$ ;

3) $(-4x^2+3x+1)(x^2+4)(x+5)<0$ ; 4) $x^4-5x^2+4>0$ ;

5) $3x^3-12x^2+9x>0$ ; 6) $x^3-x^2+4x<0$ ;

7) $x(x^2-4)(x^2-3)>0$ ;

8) $x(x^2+x+1)(2x^2+7x+3)(x^2-3x+2)<0$.

**V. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz:**

1) $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}<\frac{8}{x^2-1}$ ;

2) $3+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{2x+1}$ ;

3) $\frac{2x^2-6x+3}{x^2-5x+4}<1$ ;

4) $\frac{x^4-17x^2+60}{x(x^2+8x+5)}<0$ ;

5) $\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})x-(\sqrt{6}+1)}{4x^2-1}<1$ ;

6) $\frac{1}{x^2-2x-15}>\frac{1}{x^2-x-1}$ ;

7) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}-\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}-\frac{3x}{x^2-4}>0$ ;

8) $\frac{x+4}{-2x^2+3x+7}>3$ ;

9) $\frac{1}{x+3}-\frac{2x-11}{2(x^2-1)}<\frac{2x-25}{2(x^2+2x-3)}$ .

**VI. Aşağıdaki eşitsizlik takımlarını aynı zamanda sağlıyan «x» in değerlerini bulunuz:**

1) $\begin{cases} x^2-12x+32>0 \\ x^2-13x+22<0 \end{cases}$ ;

2) $\begin{cases} 5x^2-6x-4>0 \\ x^2-9x+8<0 \end{cases}$ ;

3) $\begin{cases} 5x^2-7x+1<0 \\ x^2-9x+8\le 0 \end{cases}$ ;

4) $\begin{cases} \frac{x^2-3x-2}{2x^2-3x}\le 0 ; \\ \frac{4x^2-12x+5}{x^2-5x+4}<0 ; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x^3-5x^2+2x<0 \\ x^3-x^2+x>0 \end{cases}$ ;

6) $\begin{cases} (1-x+x^2)(1-2x)<0 \\ \frac{1+x}{2-x^2}>0 \end{cases}$ ;

7) $\begin{cases} x^2-4x-12>0 \\ 2x-1<0 \\ x^2+x-12<0 \end{cases}$

**VII. «m» nin değerlerine göre, aşağıdaki denklemlerin köklerinin varlığını ve işaretlerini inceleyiniz:**

1) $x^2-2(m-1)x+2m+1=0$ ;

2) $(m-3)x^2-2(3m-4)x+7m-6=0$ ;

3) $3mx^2 - 2(3m - 2)x + 3(m - 1) = 0$ ;

4) $(m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ ;

5) $(m^2 - m - 2)x^2 - 2(m - 1)x + 2 = 0$ ;

6) $x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 - 4m + 1 = 0$ ;

7) $mx^2 + (m - 4)x + m + 1 = 0$ ;

8) $x^2 - 2mx + 6m + 6 = 0$ ;

9) $(m + 2)x^2 - (3m - 1)x + m + 4 = 0$ ;

10) $(2m + 3)x^2 + 2(m - 7)x + 2 + 5m = 0$ ;

11) $(3m - 1)x^2 - (2m + 5)x + 4 + m = 0$ ;

12) $x^2 - (m + 1)x - 2m^2 - m + 1 = 0$ ;

**VIII. Aşağıdaki problemleri çözünüz :**

1) $(m+1)x^2-2(m+1)x+2m+3$ üçterimlisi «m» nin hangi değeri için, «x» ne olursa olsun, negatiftir? (Cevap : $m < -2$).

2) $x^2+2x+n$ üçterimlisinde, «n» ne olmalıdır ki, «x» ne olursa olsun, bu üçterimli «10» dan büyük kalsın? (Cevap : $n > 11$).

3) $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ denklemi veriliyor. «m» ne olmalıdır ki;

a) Kökler gerçek olsun ; b) Kökler ters işaretli olsun.

4) $x^2-2(4m-1)x+15m^2-2m-3$ üçterimlisi «m» nin hangi değerleri için, «x» ne olursa olsun, pozitiftir ?

5) a, b, c bir üçgenin üç kenarını gösteriyorlarsa, «x» ne olursa olsun,

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

üçterimlisi daima pozitif olur.

6) $mx^2+(m-1)x+m-1$ üçterimlisi «m» nin hangi değerleri için, «x» ne olursa olsun, negatiftir? (Cevap: $m < -\frac{1}{3}$).

7) $f(x)=x^4+x^3-7x^2+ax+b$ çokterimlisi $x = 1$ ve $x = -3$ için sıfır olduğuna göre, «a» ve «b» yi bulunuz. Bulunan değerleri yerine koyunuz ve $f(x) > 0$ eşitsizliğini çözünüz.

Yol gösterme: x yerine verilen değerleri koyunca çokterimlinin sıfır olacağını düşünerek a, b yi bulunuz. Sonra bu çokterimlinin $(x^2+2x-3)(x^2-x-2)$ şeklinde çarpanlarına ayrılacağın görünüz.

**IX. Aşağıdaki köklü eşitsizlikleri çözünüz :**

1) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x}>\frac{2}{10}$ ; 2) $2x-1>\sqrt{x^2-3x+2}$ ;

3) $\sqrt{(x-1)(x+5)}>\sqrt{(x-3)(x+7)}$.

ÖRNEKLER :

1°. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-8}>3$.

**Çözümü :**

Bu eşitsizliğin çözülebilmesi için, $x>8$ olmalıdır. $\sqrt{2x+1}>3+\sqrt{x-8}$ şekline konabilen eşitsiziliğin her iki yanı ayni işarette olduğundan, kareleri alınabilir. Her iki yanın karesi alınırsa, $2x+1>9+x-8+6\sqrt{x-8}$ ve kare köklü terim bir yanda bırakılırsa, $x>6\sqrt{x-8}$ olur. Bunun da her iki yanı pozitif olduğundan karesi alınabilir. Böylece; $x^2>36(x-8)$ veya $x^2-36x+288>0$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliği gerçekliyen x'ın değerleri üçterimlinin kökleri olan 12 ve 24 sayılarının dışındadır. Ancak, $x>8$ olacağından eşitsizlik, $8<x<12$ ve $x>24$ için gerçekleşir.

2°. $\sqrt{3x-8}-\sqrt{5x+3}>\sqrt{x+6}$.

**Çözümü :**

Kök içindeki ifadelerin pozitif olabilmesi için $x>\frac{8}{3}$ olmalıdır. $x>\frac{8}{3}$ kabul edersek sol yandaki ikinci terim sağa geçirilir, iki yan da pozitif olduğundan, karesi alınır ve sadeleştirilirse,

$$-3x-17>2\sqrt{(x+6)(5x+3)} \quad \text{olur.}$$

$x>\frac{8}{3}$ için birinci yan negatif ve ikinci yan ise pozitiftir. Bundan ötürü her iki yanın, yeniden, karesi alınamaz. O halde, verilen eşitsizliğin çözümü yoktur.

## *ALTINCI BÖLÜM*

### A. $y = ax^2 + bx + c$ FONKSİYONUNUN DEĞİŞİMİ VE GRAFİĞİ

1. İkinci derece $ax^2 + bx + c$ üçterimlisinde «x» i, $-\infty$ dan $+\infty$'a kadar her değeri alabilen bir değişken olarak düşünelim. «x»ın bu değerlerine karşılık, üçterimlinin ne gibi değerler alacağını arıyalım. Üçterimliyi kısaca «y» ile gösterelim. O halde:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{dir.}$$

İkinci yan, ikinci derece üçterimlisi;

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

1°. $a > 0$ olsun.

x; $-\infty$ dan $-\frac{b}{2a}$ ya kadar arttırılırsa, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; $+\infty$ dan sıfıra doğru azalır ve y fonksiyonu da $+\infty$ dan $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ya kadar azalır. Ve «x» e $-\frac{b}{2a}$ dan $+\infty$ a doğru değerler verilirse «y» de $\frac{4ac-b^2}{4a}$ dan $+\infty$ a doğru artar. y fonksiyonunun bu değişimi aşağıdaki tablo ile gösterilebilir:

(A) $a>0$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $\frac{4ac-b^2}{4a}$ | ↗ | $+\infty$ |

Tablodan da görüleceği üzere, y fonksiyonu bu değişim esnasında $\frac{4ac-b^2}{4a}$ dan daha küçük bir değer alamaz. Bu değere fonk-

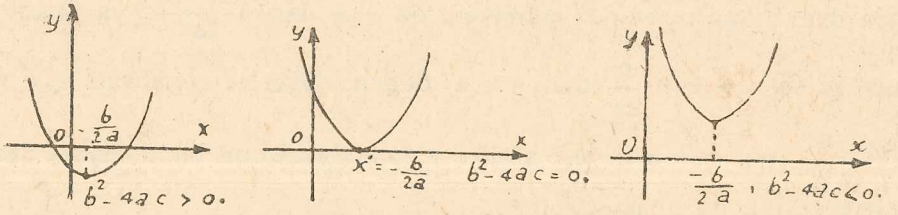
siyonun minimum değeri veya sadece minimum'u denir. Koordinatları $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ olan noktaya da fonksiyonun minimum noktası denir.

$b^2-4ac>0$ ise, fonksiyonun minimum değeri, $\frac{4ac-b^2}{4a}$, negatiftir ve minimum noktası x ekseninin alt tarafındadır. Bu durumda fonksiyonun gösterdiği eğri x eksenini iki noktada keser. Bu kesim noktalarının apsisleri $x^2+bx+c$ üçterimlisinin kökleri, yani «y» yi sıfır yapan «x» in değerleridir.

$b^2-4ac=0$ ise fonksiyonun minimum değeri sıfırdır. Minimum noktası x ekseninin üzerindedir ve fonksiyonun gösterdiği grafik x eksenine bu noktada teğettir. Bu değme noktasının apsisi $\left(x'=-\frac{b}{2a}\right)$ üçterimlinin bir çift köküdür.

$b^2-4ac<0$ ise, fonksiyonun minimum değeri pozitiftir. Minimum noktası x ekseninin üst tarafındadır ve fonksiyonun gösterdiği grafik x eksenini kesmez; o halde üçterimlinin kökleri yoktur demektir.

**Bu değişim aşağıda grafikle gösterilmiştir :**




Şekil : 6

$a>0$ halinde, grafiklerde görüldüğü üzere, fonksiyonun gösterdiği eğrinin kolları yukarıya yönelmiştir ve eğrinin konkavlığı «y» ekseninin pozitif yönündedir.

2°. $a<0$ olsun.

x; $-\infty$ dan $-\frac{b}{2a}$ ya kadar arttırılırsa, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, $+\infty$ dan sıfıra doğru azalır ve «y» fonksiyonu da $-\infty$ dan $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ya kadar

artar. Ve «x» e $-\frac{b}{2a}$ dan $+\infty$ a doğru değerler verilirse, «y» de $\frac{4ac-b^2}{4a}$ dan $-\infty$a doğru azalır. «y» fonksiyonunun bu değişimi aşağıdaki tablo ile gösterilebilir:

(B) $a < 0$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | $\frac{4ac-b^2}{4a}$ Mak. | ↘ | $-\infty$ |

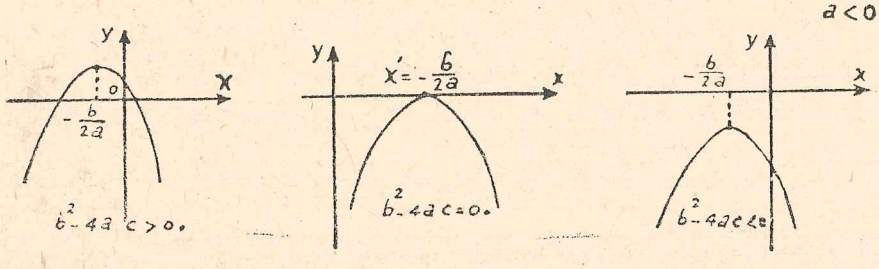
Tablodan da görüleceği üzere, «y» fonksiyonu bu değim esnasında, $\frac{4ac-b^2}{4a}$ dan daha büyük bir değer alamaz. Bu değere fonksiyonun maksimum değeri veya sadece maksimum'u denir. Koordinatları; $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ olan noktaya da fonksiyonun maksimum noktası denilir.

$b^2 - 4ac > 0$ ise, fonksiyonun maksimum değeri $\frac{4ac-b^2}{4a}$ pozitiftir ve maksimum noktası x ekseninin üst tarafındadır. Bu durumda fonksiyonun gösterdiği eğri x eksenini iki noktada keser. Bu noktaların apsisleri, «y» yi sıfır yapan «x» in değerleridir ki, üçterimlinin de kökleridir.

$b^2 - 4ac = 0$ ise, fonksiyonun maksimum değeri sıfırdır. Maksimum noktası x ekseninin üzerindedir ve grafik x eksenine bu noktada teğettir. Değme noktasının apsisi üçterimlinin bir çift köküdür.

$b^2 - 4ac < 0$ ise, fonksiyonun maksimum değeri negatiftir. Maksimum noktası x ekseninin alt tarafındarır ve grafik x eksenini kesmez.

**Bu değişim aşağıda grafikle gösterilmiştir:**



$a < 0$ halinde, grafiklerde görüldüğü üzere, fonksiyonun gösterdiği eğrinin kolları aşağıya yönelmiştir ve eğrinin konkavlığı «y» ekseninin negatif yönündedir. (*)

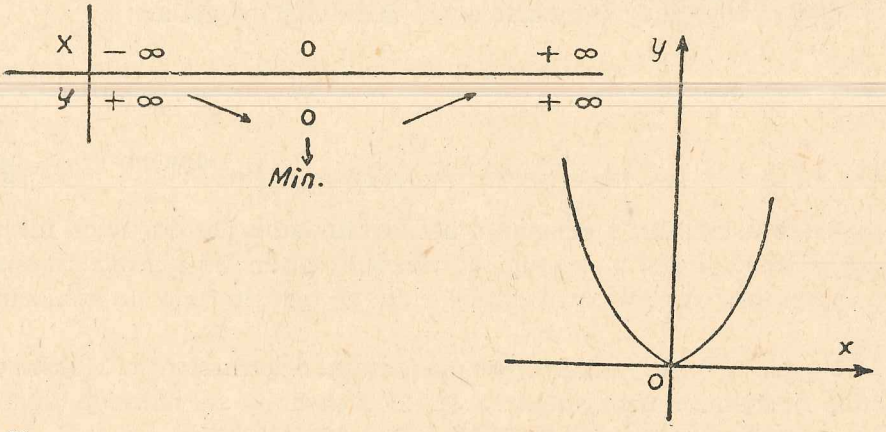
2. $y = ax^2+bx+c$ **fonksiyonunun değişim ve grafiği üzerine,**

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER :

1) $y = 3x^2$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği.

$a = 3 > 0$ dır; eğrinin minimum noktası vardır. Verilen fonksiyonda b ve c sıfır olduğundan, minimum noktası O(0,0) dır. $x = \mp \infty$ için «y» daima $+ \infty$ değerini alır. x ın $- \infty$ ile «0» değerleri arasında fonksiyon azalır; «0» ile $+ \infty$ değerleri arasında fonksiyon artar.

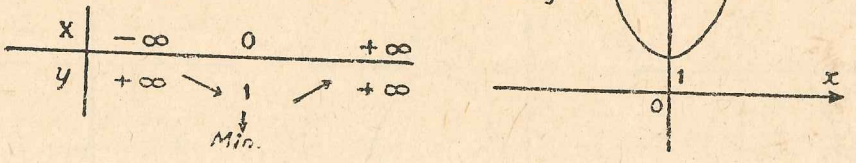
*Değişim tablosu* *Grafiği*




2) $y = 2x^2 + 1$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği.

$a = 2 > 0$ dır. Verilen fonksiyonda b sıfırdır. Minimum noktasının apsisi $-\frac{b}{2a} = 0$ ve buna karşılık «y» nin aldığı değer «1» dir.

*Değişim tablosu:* *Grafiği:*




(*) $y=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun gösterdiği eğriye «Parabol» adı verilir.

$x = \pm\infty$ için $y = +\infty$ dur. «x» in $-\infty$ ile, «0» değerleri arasında fonksiyon azalır, «0» ile $+\infty$ değerleri arasında fonksiyon artar.

3) $y = 2x^2 + 3x$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği.

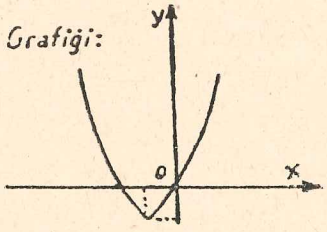
$a = 2 > 0$ dır. Fonksiyonda «c» sıfırdır. Minimum noktasının apsisi $-\frac{3}{4}$ ve ordinatı $-\frac{9}{8}$ dir. $x = \pm\infty$ için $y = +\infty$ olur.

x in $-\infty$ ile $-\frac{3}{4}$ değerleri arasında fonksiyon azalır; $-\frac{3}{4}$ ile $+\infty$ değerleri arasında fonksiyon artar. $y = 0$ için $x = 0$ ve $x = -\frac{3}{2}$ dir; yani eğri x eksenini iki noktada keser.

*Değişim tablosu:*

| x | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-\frac{3}{4}$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↘ | $-\frac{9}{8}$ (Min.) | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

*Grafiği:*




4) $y = 4x^2 - 6x + 3$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği.

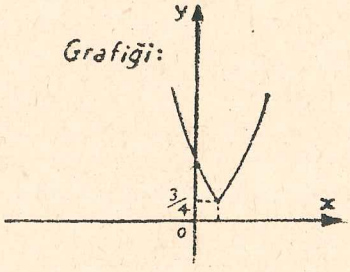
Fonksiyonda $a = 4 > 0$ olduğundan minimumu vardır. Minimum noktasının apsisi $\frac{3}{4}$ ordinatı $\frac{3}{4}$ tür. $x = \pm\infty$ için $y = +\infty$ olur.

x in $-\infty$ ile $\frac{3}{4}$ değerleri arasında fonksiyon azalır ve x in $\frac{3}{4}$ ile $+\infty$

*Değişim tablosu*

| x | $-\infty$ | | 0 | | $\frac{3}{4}$ (Min.) | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 3 | ↘ | $\frac{3}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

*Grafiği:*



değerleri arasında fonksiyon artar. $\Delta < 0$ olduğundan, eğri x eksenini kesmez; (0,3) noktasında y eksenini keser.

5) $y = -3x^2 + 5x - 2$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği.

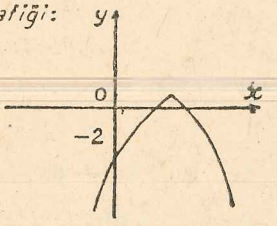
Fonksiyonda $a = -3 < 0$ olacağından maksimumu vardır. Maksimum noktasının apsisi $\frac{5}{6}$, ordinatı $\frac{1}{12}$ dir. $x = \mp \infty$ için $y = -\infty$ dur. $(0, -1)$ noktası eğrinin «y» eksenini kestiği nokta;

$y=0 \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$ noktaları da eğrinin «x» eksenini kestiği noktalardır.

Değişim tablosu :

| x | $-\infty$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{6}$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ ↗ | $-2$ ↗ | 0 ↗ | $\frac{1}{12}$ (Mak.) | ↘ 0 ↘ | $-\infty$ |

Grafiği:




3. ODEVLER :

**I. Aşağıdaki fonksiyonların maksimum veya minimum noktalarının koordinatlarını bulnuz ve sonra da grafiklerini çiziniz :**

1) $y=2x^2-3x+1$;
2) $y=x^2-6x-16$;
3) $y=-3x^2+x-4$;
4) $y=-3x^2+1$;
5) $y=-x^2+4x+1$;
6) $y=3x^2+2x$;
7) $y=5x^2-4x+3$;
8) $y=-2x^2+3x$.

**II. Aşağıda denklemleri verilen parabolleri çiziniz :**

1) $y=4x^2+7$;
2) $y=5x^2+3x$;
3) $y=x^2+3x-10$;
4) $y=-3x^2+4$;
5) $y=-5x^2+2x+4$;
6) $y=-5x^2+x$;
7) $y=-x^2+x+1$;
8) $y=\frac{2}{3}x^2-5x+7$

**III. Aşağıdaki parabol ve doğruların kesim noktalarının koordinatlarını bulunuz; kesim noktalarını grafik üzerinde de gösteriniz :**

1) $y=4x^2$, $y=-4x+5$;
2) $y=-5x^2$, $y=-2x-4$;
3) $y=-x^2$, $y=-4x-1$;
4) $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=4x-8$.

(Yol gösterme: Parabol ve doğrunun y lerini eşit kılınız.)

**IV. Aşağıdaki parabollerin kesim noktalarının koordinatlarını bulunuz; parabollerin grafiklerini de çizerek kesim noktalarını gösteriniz.**

1) $y=x^2-3x-5$, $y=2x^2-5x-8$;
2) $y=3x^2+2x-1$, $y=4x^2+5x-5$.

**V. Aşağıdaki problemleri çözünüz :**

1) $mx^2-2x-(4m+1)=0$ denklemi veriliyor.

a) «m» ne olursa olsun, bu denklemin iki farklı kökü olduğunu gösteriniz.

b) «m» nin hangi değerleri için, köklerin karelerinin toplamı «10» a eşit olur ?

(Cevap : $m=2$ ve $m=-1$).

c) $y=mx^2-2x-(4m+1)$ fonksiyonunda «m» ne olmalıdır ki, fonksiyonun gösterdiği parabol A(1, 0) noktasından geçsin? «m» nin bulunan değerini yerine koyarak grafiğini çiziniz.

(Cevap : $m=-1$).

2) $y=ax^2+bx+c$ fonksiyonu veriliyor :

a) a, b, c sayılarını o suretle seçiniz ki, başlangıç noktasından geçen bu fonksiyon, $x=-1$ için 1 maksimum değerini alsın

(Cevap : $a=-1$, $b=-2$, $c=0$).

b) Bu parabolü çiziniz.

c) Parabolün $y = mx$ doğrusiyle kesim noktalarını inceleyiniz. Ve doğrunun parabole teğet olması halinde m yi belirtiniz.

(Cevap : $m = -1$ için teğet).

d) P parabolünü A ve B noktalarında kesen $y = -2x + \lambda$ doğrusu veriliyor; (burada $\lambda$ bir parametredir). AB nin M orta noktasının geometrik yerini bulnuz (geometrik yerin denkleminden istenilen, M orta noktasının koordinatları arasındaki değişmez bağıntının bulunmasıdır).

(Cevap : Geometrik yerin denklemi $x = 0$ dır; yani geometrik yer «y» eksenidir).

3) $y = 2x^2 - (m-3)x + m + 1$ parabolü ile $y = mx + m - 1$ doğrusu veriliyor :

a) Parabolle doğrunun durumunu inceleyiniz.

$$\left(\text{Cevap: } m = \frac{7}{2} \; ; \; m = \frac{1}{2} \text{ için teğet}\right)$$

b) Teğet olmaları halinde grafiklerini çiziniz.

c) Kesim noktalarının meydana getirdiği doğru parçasının orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

$$\left(\text{Cevap: Geometrik yer } y = 2x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

4) $y = x^2 - x - 2$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz. Ve eğri üzerinde $x = 1$ ve $x = 3$ olan A ve B noktalarını alınız:

a) AB doğrusunun denklemini yazınız.

(Cevap : $y = 3x - 5$).

b) AB doğrusunun Ox ve Oy eksenlerini kestiği P ve Q noktalarını bulunuz ve OPQ üçgeninin alanını hesabediniz.

$$\left(\text{Cevap: Alan} = \frac{25}{6} \text{ Birim kare}\right)$$

5) $y = px^2 + qx + r$ fonksiyonunda, p, q ve r yi o suretle seçiniz ki, fonksiyon $x = 2$ için $-1$ minimum ve $x = 1$ için 1 değerini alsın. Fonksiyonu kurunuz ve grafiğini çiziniz. Bu grafiğin y eksenini kestiği nokta

A ve mnimum noktası B olsun. Grafik üzerinde öyle bir P noktası bulunuz ki, bu noktadaki teğet AB doğrusuna paralel olsun.

(Cevap : $p = 2$; $q = -8$; $r = 7$).

6) $y = x^2 + px + q$ fonksiyonunda, p ve q ne olmalıdır ki, $x = 2$ için $y = 0$ ve y nin minimumu $-4$ olsun. p ve q yü bulduktan sonra, fonksiyonun grafiğini çiziniz.

7) $A(1, 0)$, $B(0, 3)$, $C(3, 0)$ noktalarından geçen parabol denklemini yazınız ve sonra da değişimini inceleyiniz ve eğrisini çiziniz.

(Cevap : $y = x^2 - 4x + 3$).

8) $y = 2x + 5$ ve $y = -2x + 5$ doğrularına teğet olan ve $P(3, -5)$ noktasından geçen parabol denklemini kurunuz.

$$\left(\text{Cevap : } y = -x^2+4 \quad \text{ve} \quad y = -\frac{1}{9}x^2-4\right).$$

9) $A(2, 2)$, $B(-1, 11)$, $C(3,7)$ noktaları bilinen parabol denklemini kurunuz.

10) İkinci derecedn öyle bir fonksiyon kurunuz ki, eğrisi y eksenini $-2$ de kessin, tepe noktasının apsisi $x = 1$ ve minimumu da $-5$ olsun?

(Cevap : $y = 3x^2 - 6x - 2$).

11) $x^2+(m-5)x-m+4=0$ denkleminde m ne olmalıdır ki, bu denklemin köklerinin toplamı minimum olsun ?

(Cevap : $m = 4$).

12) $y = x^2 - x - 6$ parabolü ile $y = 2x+m$ doğrusunun durumunu inceleyiniz.

13) $y = x^2 + 2x - 3$ parabolünün $y = 4x - 5$ doğrusuna paralel teğet denklemini yazınız.

(Cevap : $y = 4x - 4$).

(Yol gösterme : Teğetin denklemi $y = 4x+m$ şeklindedir. Parabol ve teğetin y lerini eşit kılınız. $x^2 - 2x - (3 + m) = 0$ olur. Bu denklemin $\Delta$ sını sıfıra eşit kılınız. $m = -4$ bulunur).

14) $y = -x^2 + x - 1$ ve $y = -x^2 + 3x - 2$ parabollerinin bir ortak noktası ve bir ortak teğeti olduğunu gösteriniz; ve ortak noktanın koordinatlarını bulunuz.

(Cevap: Ortak nokta $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$; ortak teğet, $y=x-1$)

15) $y = x^2 - mx - (m + 1)$ ve $y = -x^2 - (m+1)x+m+1$ paraboleri veriliyor:

a) m ne olmalıdır ki bu eğriler birbirine teğet olsunlar.

(Cevap: $m = -\frac{17}{16}$)

b) $m = 2$ olması halinde A ve B kesim noktalarından geçen doğrunun başlangıç noktasından geçtiğini gösteriniz.

16) «m» nin farklı değerlerine göre $y = 2x^2 - m + 1$ parabolü ile $y = mx$ doğrusunun durumunu inceleyiniz.

17) $y=x^2+2x+m$; $y=x^2+2mx+m^2-1$; $y=x^2+2mx+m^2+m$ parabollerinin ayrı ayrı olarak tepe noktalarının geometrik yerini bulunuz.

(Cevap: 1. nin $x = -1$ doğrusu; 2. nin $y = -1$ doğrusu; 3. nün $y = -x$ doğrusu).

18) $y=(m+1)x^2-17x+2m-1$ parabolü ile $y = 3x - 22$ doğrusunun bir birine teğet olabilmesi için «m» ne olmalıdır?

19) $y = x^2 - 5x + 6$ ve $y = -x^2 + mx + 4$ parabollerinin durumunu inceleyiniz.

20) $y = 3x^2 - 2x + 1$ parabolüne dışındaki $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemlerini yazınız.

(Cevap: $y = 10x - 11$ ve $y = 4x - 2$).

**4. UYGULAMA. — Nümerik (sayısal) bir ikinci derece denkleminin grafikle çözümü.**

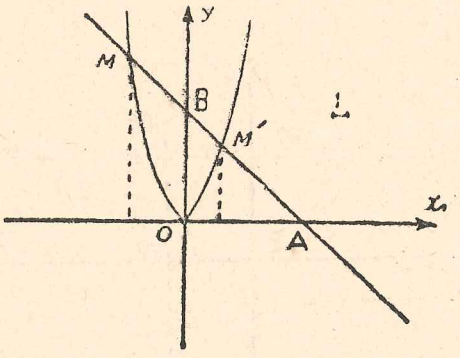
Denklem, $ax^2 + bx + c = 0$ olsun.

Önce $ax^2 = -bx - c$ yazılır.

$y = ax^2$ ve $y = -bx - c$ fonksiyonlarını düşünelim. Aynı bir dik eksenler sisteminde, denklemi $y = ax^2$ olan parabolü ve denklemi $y = -bx - c$ olan doğruyu çizelim. Ve bu iki eğrinin kesiştiklerini kabul edelim. **İşte bu iki eğrinin** ortak noktalarının apsisleri $ax^2+bx+c=0$ **denkleminin kökleridir.**

ÖRNEK :

**$x^2 + x - 6 = 0$ denkleminin köklerinin grafikle bulunması.**




$y = x^2$ ve $y = -x+6$ diyelim. $y = x^2$; x eksenine «0» başlangıç noktasında teğet bir parabolü ; $y = -x+6$ da eksenleri kestiği noktalarla kolayca çizilebilen bir doğrudur. Bu doğrunun eksenleri kestiği noktaların koordinatları B(0,6); A(6, 0) dır. Her iki grafiğin ortak noktaları olan M ve M' nün apsisleri —3 ve +2, verilen denklemin kökleridir.

ÖDEVLER :

**VI. Aşağıdaki denklemlerin köklerini grafikle bulunuz :**

1) $x^2 - 7x + 10 = 0$ ;
2) $x^2 - 2x - 3 = 0$ ;
3) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ;
4) $x^2 - 10x + 25 = 0$ ;
5) $x^2 + 7x + 10 = 0$ ;
6) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ;
7) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$

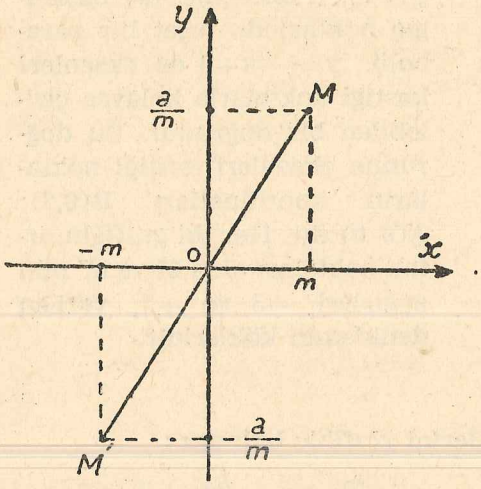
**B. $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ Fonksiyonunun Değişimi ve Grafiği**

1. Önce özel bir hal olan $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunun değişimini inceliyelim ve grafiğini çizelim. Bu fonksiyon x in $x = 0$ dan başka bütün değerleri için belirlidir; yani x in sıfırdan farklı her değeri için y daima belirli bir değer alır.

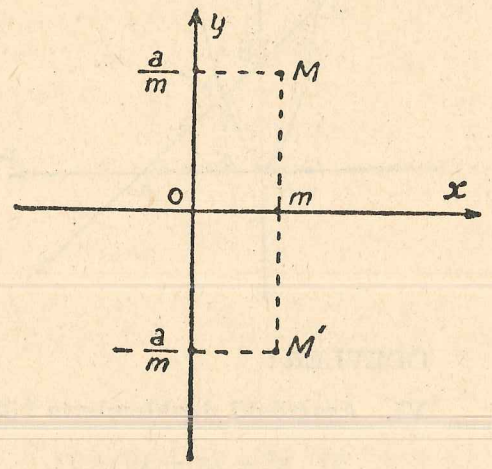
O halde, bu fonksiyonun değişimini, x in pozitif veya negatif değerlerine göre, $(-\infty, 0)$ ve $(0, +\infty)$ aralıklarında incelemek gerekir.

Bu fonksiyon tek değerli bir fonksiyondur; yani x in simetrik (+m) ve (—m) iki değerine karşılık y de $\left(+\frac{a}{m}\right)$ ve $\left(-\frac{a}{m}\right)$ simetrik değerlerini alır (Şek. 8). Böylece x in simetrik iki değeri yardımı ile elde edilen M ve M' noktaları «O» başlangıç noktasına göre simetriktirler. O

halde $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunun gösterdiği eğri «O» başlangıç noktasına göre simetriktir; «O» simetri merkezidir. Bu nedenle fonksiyonun değişimini incelerken x in pozitif değerlerini gözönünde tutmakla yetinilebilir.




Şekil : 8




Şekil : 9

$y = \frac{a}{x}$ ve $y = \frac{-a}{x}$ fonksiyonlarını alalım. Bu fonksiyonlar x in ayni bir değeri, $x = m$, için $y_1 = \frac{a}{m}$ ve $y_2 = \frac{-a}{m}$ simetrik değerlerini alırlar (Şek. 9). O halde, bu iki eğri Ox eksenine göre simetriktir.

Buradan, $y = \frac{a}{x}$ eğrisi «O» başlangıç noktasına ve Ox eksenine göre simetrik olduğundan, bu fonksiyonun nasıl değiştiği hakkında bir fikir edinmek için, $a > 0$ ve $x > 0$ halini incelemenin yeter olduğu sonucuna varılır.

Değişim yönü. — $a > 0$ farzedelim ve x e pozitif $x_1$ ve $x_2$ değerlerini verelim. x in $x_2 - x_1$ artma miktarına karşılık y nin artma miktarı,

$$y_2 - y_1 = \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = -\frac{a(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$$

dır. a, $x_1$ ve $x_2$ hipotezden pozitif olduklarından, $y_2 - y_1$ artma miktarının işareti $x_2 - x_1$ in işaretinin tersidir; yani y fonksiyonu, x in gittikçe büyüyen değerlerine karşılık gittikçe küçülen değerler veya x in gittik-

çe küçülen değerlerine karşılık gitikçe büyüyen değerler alır. O halde $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu $a > 0$ halinde, $x = 0$ değeri hariç, x ne olursa olsun, eksilen bir fonksiyondur.

$y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunda x e gitikçe küçülen pozitif değerler ($x = 1$; 0,1; 0,01; 0,001;...) verilirse, y fonksiyonu pozitif ve gittikçe büyüyen değerler ($y=a$; 10a; 100a; 1000a; ...) alır. xe gittikçe büyüyen negatif değerler ($x=-1$; $-0,1$; $-0,01$; $-0,001$, ...) verilirse fonksiyon negatif ve gittikçe küçüklen değerler ($y=-a$; $-10a$; $-100a$; $-1000a$; ...) alır. Bu husus şu şekilde de ifade edilebilir :

$a > 0$ ise;

1°. x pozitif taraftan sıfıra doğru yaklaşan değerler aldığında, $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu pozitif ve gittikçe büyüyen değerler alarak $+\infty$ a doğru yaklaşır.

2°. x negatif taraftan sıfıra doğru yaklaşan değerler aldığında $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu negatif ve gittikçe büyüyen değerler alarak $-\infty$'a doğru yaklaşır.

$x = 0$ için ise $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu kesiklidir; yani $x = 0$ için y ye belirli bir değer bulunamaz.

$a < 0$ ise (simetri özelliğinden) :

1°. x pozitif değerler alarak sıfıra doğru yaklaştığında y fonksiyonu «$-\infty$» a doğru yaklaşır.

2°. x negatif değerler alarak sıfıra doğru yaklaştığında y fonksiyonu «$+\infty$» a doğru yaklaşır.

Bu halde de $x = 0$ için $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu kesiklidir.

Bu kez $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunda x a mutlak değerce gittikçe büyüyen

değerler verildiğinde, yukarıdaki düşünüşle y nin aldığı değerler gözönünde bulundurulursa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1. $a > 0$ ise,

x, $+\infty$ a doğru büyüyen değerler aldığında, $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu, pozitif taraftan, sıfıra doğru yaklaşır; ve simetriden ötürü de x, $-\infty$ a doğru değerler aldığında, $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu, negatif taraftan, sıfıra doğru yaklaşır.

2. $a < 0$ ise,

x, $+\infty$ a yaklaşırken $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu negatif değerler alarak, pozitif taraftan, sıfıra doğru yaklaşır; ve x, $-\infty$ a yaklaşırken, fonksiyon pozitif değerler alarak, negatif taraftan, sıfıra doğru yaklaşır.

Bütün bu açıklamaları, aşağıdaki şekilde, bir değişim tablosunda özetliyebiliriz.

| | $x$ | $-\infty$ | ↗ | $-\varepsilon$ | $0$ | $+\varepsilon'$ | ↗ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \frac{a}{x}$ | $a > 0$ | $0$ | ↘ | $-\infty$ | $+\infty$ | | ↘ | $0$ |
| | $a < 0$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ | $-\infty$ | | ↗ | $0$ |

(Burada ε (epsilon) ve ε' istenildiği kadar küçük ve pozitif birer sayıyı göstermektedir).

Değişim tablosunun incelenmesinden de:

1°. $a > 0$ ise;

$y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu x in, $x = 0$ değeri hariç, bütün değerleri için, eksilen bir fonksiyondur.

2°. $a < 0$ ise;

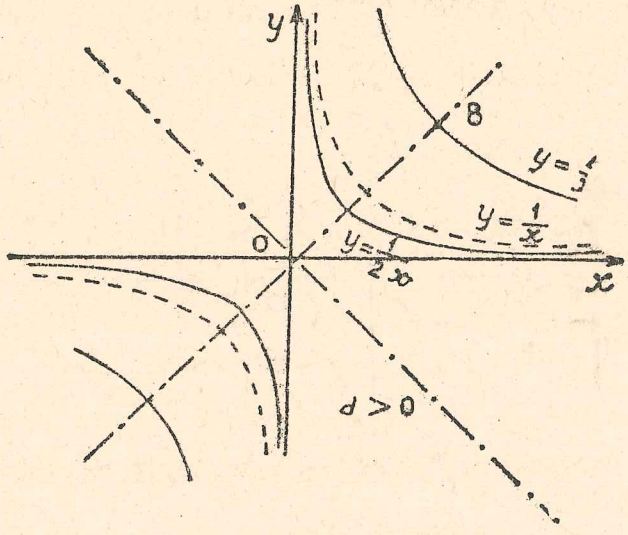
$y = \frac{a}{x}$ fonksiyonu x in, $x = 0$ değeri hariç, bütün değerleri için, artan bir fonksiyondur.

Her iki halde de $x = 0$ için, fonksiyon kesiklidir.

Düzenlenen tabloya göre $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunun grafiği kolaylıkla çizilebilir.

1°. $a > 0$. Aynı koordinat eksenlerine göre, uzunluk birimi aynı olmak üzere.

$$y = \frac{1}{x} \text{ noktalı, } y = \frac{4}{x}, \quad y = \frac{1}{2x}$$




Şekil : 10

fonksiyonlarının gösterdikleri eğrileri çizelim (Şek. 10). Şekilde görüldüğü üzere, x in -mutlak değerce- gittikçe büyüyen değerleri için, eğri x eksenine istenildiği kadar yaklaşır; başka bir deyimle x ekseni eğriye sonsuzda teğet olur. Ve yine x in gittikçe sıfıra yaklaşan değerleri için eğrinin her iki kolu y eksenine istenildiği kadar yaklaşır; yani y ekseni eğriye sonsuzda teğet olur.

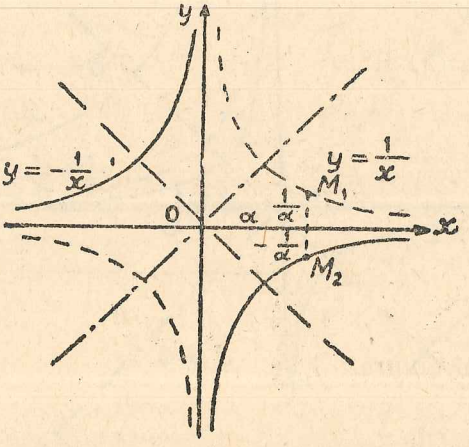
Buradan koordinat eksenleri $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin asimtotlarıdır sonucuna varılır.

**Tarif.** — Asimtot: Bir C eğrisi üzerinde alınan bir noktanın bir D doğrusuna olan uzaklığı, nokta eğrinin kolu üzerinde sonsuza doğru yaklaştığı zaman, sıfıra doğru yaklaşırsa, D doğrusu C eğrisinin asimtotudur, denilir.

Başka bir deyimle, bir eğriye sonsuzda teğet olan doğruya, o eğrinin **asimtotu** denir.

Not. — $y = \frac{a}{x}$ eğrisi «a» küçüldükçe koordinat eksenlerine yaklaşır; «a» büyüdükçe eksenlerden uzaklaşır.

2°. $a < 0$. Bu halde $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunun gösterdiği eğriler, $a > 0$ iken gösterdiği eğrilerin Ox eksenine göre simetrikleridir (Şek. 11). Böylece çizilen $y = \frac{a}{x}$ eğrilerine **İkizkenar Hiperbol** adı verilir.




Şekil : 11

Not. — Değişim tablosu düzenlenirken, grafiğin çizimine yarıyacak bir kaç noktanın koordinatları da tabloya eklenmelidir.

**2. ÖDEVLER:**

**I. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:**

1. $y = \frac{1}{2x}$, 2. $y = \frac{1}{5x}$, 3. $y = \frac{2}{x}$

4. $y = \frac{4}{x}$, 5. $y = -\frac{1}{x}$, 6. $y = -\frac{3}{x}$

7. $y = -\frac{7}{2x}$, 8. $y = -\frac{1}{3x}$, 9. $y = \frac{3}{2x}$

10. $y = \frac{0.1}{x}$, 11. $y = -\frac{0.2}{x}$

**II. Aşağıdaki eğrilerle doğruların kesim noktalarını bulunuz:**

1. $y = \frac{3}{x}$, $y = x + 2$; 2. $y = -\frac{2}{x}$, $y = 2x + 5$

3. $y = \frac{5}{2x}$, $y = -\frac{1}{2}x - 3$; 4. $y = -\frac{1}{x}$, $y = x - \frac{5}{2}$.

**III. Aşağıdaki problemleri çözünüz:**

1. $y = -\frac{1}{2}x + 4$ doğrusunun $y = \frac{8}{x}$ eğrisine teğet olduğunu gösteriniz ve değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

2. $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunda «a» yı o suretle tayin ediniz ki, eğri A(—2, 1) noktasından geçsin, eğriyi de çiziniz.

3. $y = \frac{2}{x}$ eğrisiyle $x + 3y - 5 = 0$ doğrusunu ayni koordinat sisteminde çiziniz; bunlar yardımiyle,

$$xy = 0$$
$$x + 3y - 5 = 0$$

sisteminin köklerini bulunuz.

4. $y = \frac{2}{x}$ eğrisiyle $y = 3x + 1$ doğrusu veriliyor:

a) A, B kesim noktalarının koordinatlarını bulunuz.

b) $y = 3x + 1$ doğrusunun ox ve oy eksenlerini kestiği noktalar, sırasiyle, C ve D ile gösterilirse, AC = BD olduğunu gösteriniz.

5. $y = \frac{4}{x}$ eğrisiyle $y = m$ doğrusu veriliyor. Doğrunun eğriyi kestiği nokta M; y eksenini kestiği nokta N; MN nin orta noktası I ve I den Oy eksenine çizilen paralelin eğriyi kestiği nokta K, Ox eksenini kestiği nokta da L olsun. KI = IL olduğunu gösteriniz.

6. $x^2-5x+4=0$ denkleminin köklerini $y=\frac{-4}{x}$ ve $y=x-5$ eğrilerini çizerek grafik metodiyle bulunuz.

7. Aynı metodla $x^2+8x-20=0$ ve $x^2-6x-16=0$ denklemlerinin de köklerini bulunuz.

8. 3. problemdeki metodla,

$$\begin{cases} xy=-2 \\ 5x+3y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=5 \\ 5x-4y+10=0 \end{cases}$$

sistemlerinin de köklerini bulunuz.

### 3. $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği.

**Tarif.** — a, b, a', b' sabit birer sayıyı göstermek üzere, $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ (1) **genel şeklinde yazılabilen cebirsel bir fonksiyona Homografik Fonksiyon denir.** Bu ifadede a ve b den ancak biri sıfır olabilir, ikisi birden sıfır olamaz (neden ?). b' sıfır olabilir, fakat a' sıfır olamaz (neden?).

ÖRNEKLER:

$$y=\frac{5}{2x-3}\,; \qquad y=\frac{2x}{x+3}\,; \qquad y=\frac{5x-1}{x}\,; \qquad y=\frac{3}{x}$$

Homografik fonksiyonlarında, sırasiyle,

$$a=0, \qquad b=0, \qquad b'=0, \qquad a=b'=0 \text{ dır.}$$

$y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ fonksiyonu, paydayı sıfır yapan $x=-\frac{b'}{a'}$ den başka x in bütün değerleri için belirlidir; yani bu değerin dışındaki, x in her değerine y nin belli bir değeri tekabül eder.

Karşıt olarak, (1) homografik fonksiyonu, x a göre düzenlenirse,

$$y(a'x+b')=ax=b$$
$$x(a'y-a)=b-b'y$$

veya,

$$x=\frac{b-b'y}{a'y-a} \qquad (2)$$

elde edilir. Burada x fonksiyonu, paydayı sıfır yapan $y = \frac{a}{a'}$ değeri hariç, y nin her değeri için belirlidir. O halde, (2) ifadesi de homografik bir fonksiyondur; burada y değişken, x fonksiyondur. x in $-\frac{b'}{a'}$ ; y nin $\frac{a}{a'}$ özel değerleri homografik fonksiyonların incelenmesinde önemli bir rol oynarlar.

**Homografik fonksiyonun değiştirilmesi.** — $a' \neq 0$ olduğuna göre,

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{ax+b}{a'\left(x + \frac{b'}{a'}\right)} \quad (1)$$

şeklinde yazılır. $x + \frac{b'}{a'} = X$ veya $x = X - \frac{b'}{a'}$ değeri (1) de yerine konulursa,

$$y = \frac{aX - \frac{ab'}{a'} + b}{a'X} = \frac{a}{a'} + \frac{\frac{ba' - ab'}{a'^2}}{X}$$

ve son olarak,

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\frac{ba' - ab'}{a'^2}}{x + \frac{b'}{a'}} \quad (2)$$

elde edilir. $y - \frac{a}{a'} = Y$ ile gösterilirse,

$$Y = \frac{\frac{ba' - ab'}{a'^2}}{X} \quad (3)$$

bulunur. Böylece homografik fonksiyon, $ba' - ab' \neq 0$ ise, (3) bağıntısı da, $y = \frac{A}{X}$ şekline çevrilmiş olur.

ÖRNEK: $y=\frac{2x-3}{3x+2}$ fonksiyonu alalım.

$y=\frac{2x-3}{3x+2}=\frac{2x-3}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}$ şeklinde yazılır, $x+\frac{2}{3}=X$ ve $x=X-\frac{2}{3}$ konulursa,

$$y=\frac{2\left(X-\frac{2}{3}\right)-3}{3X}=\frac{2X-\frac{13}{3}}{3X}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{13}{9}}{X}$$

son olarak,

$$y=\frac{2}{3}-\frac{\frac{13}{9}}{x+\frac{2}{3}}$$ bulunur.

NOT. — (2) şeklini ezberlemeğe lüzum yoktur; her fonksiyon basit bir hesap sonunda o şekle çevrilebilir.

DEĞİŞİMİ. — Homografik fonksiyonu (2) şeklinde yazalım.

$$y=\frac{a}{a'}+\frac{\frac{ba'-ab'}{a'^2}}{x+\frac{b'}{a'}}$$

1. $X=x+\frac{b'}{a'}$ koyalım. $x$, $-\infty$ den $+\infty$ a doğru arttığında, $X=x+\frac{b'}{a'}$ de $-\infty$ dan $+\infty$ a doğru artar ve $x<-\frac{b'}{a'}$ için negatif, $x=-\frac{b'}{a'}$ için sıfır ve $x>-\frac{b'}{a'}$ için de pozitiftir. X; $-\infty$ dan «0» a doğru arttığında — yani, $x$, $-\infty$ dan $-\frac{b'}{a'}$ ye doğru artıyor demektir $-\frac{1}{X}=\frac{1}{x+\frac{b'}{a'}}$ (3) fonksiyonu «0» dan $-\infty$ a doğru azalır. X; «0» dan $+\infty$ a doğru a arttığında — yani $x$, $-\frac{b'}{a'}$ den $+\infty$ a doğru artıyor demektir — (3) fonksiyonu $+\infty$ dan «0» a doğru azalır.

Bu değişimi, aşağıdaki gibi, bir değişim tablosunda özetleyebiliriz :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b'}{a'}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X=x+\frac{b'}{a'}$ | $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |
| $\frac{1}{X}=\frac{1}{x+\frac{b'}{a'}}$ | 0 | ↘ | $-\infty \parallel +\infty$ | ↘ | 0 |

2. $\frac{1}{X}$ , $A=\frac{ba'-ab'}{a'^2}$ ile çarpılırsa fonksiyon, $y_1=\frac{A}{X}$ şeklini alır. A pozitif veya negatif olduğuna göre, iki hal düşünülebilir. $A > 0$ ise, ($ba' - ab' > 0$ demektir) $y_1$ fonksiyonu $\frac{1}{X}$ fonksiyonu ile ayni yönde, $A < 0$ ise ters yönde değişir. Değişim tablosunu aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b'}{a'}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=\frac{1}{X}=\frac{1}{x+\frac{b'}{a'}}$ | 0 | ↘ | $-\infty \parallel +\infty$ | ↘ | 0 |
| $ba'-ab'>0$ | | | | | |
| $y_1=\frac{A}{X}$ | 0 | ↘ | $-\infty \parallel +\infty$ | ↘ | 0 |
| $ba'-ab'<0$ | | | | | |
| $y_1=\frac{A}{X}$ | 0 | ↗ | $+\infty \parallel -\infty$ | ↗ | 0 |

3. $y_1$ e $\frac{a}{a'}$ sabit sayısının eklenmesiyle elde edilen, asıl değişimini incelemek istediğimiz y fonksiyonu ile $y_1$ fonksiyonunun değişim yönleri aynıdır. Buraya kadar, bütün söylediklerimizi aşağıdaki değişim tablosunda toplayabiliriz :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b'}{a'}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ba'-ab'>0$ | | | | | |
| $y_1=\frac{A}{X}$ | 0 | $\searrow$ | $-\infty$ $\mid$ $+\infty$ | $\searrow$ | 0 |
| $y=y_1+\frac{a}{a'}$ | $\frac{a}{a'}$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\mid$ $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{a}{a'}$ |
| $ba'-ab'<0$ | | | | | |
| $y_1=\frac{A}{X}$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ $\mid$ $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 |
| $y=y_1+\frac{a}{a'}$ | $\frac{a}{a'}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ $\mid$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{a}{a'}$ |

Bu tablodan şu sonuçları söyliyebiliriz:

1°. $ba'-ab'>0$ ise, $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ fonksiyonu belirli olduğu her iki bölgede de devamlı surette, eksilen bir fonksiyon; $ba'-ab'<0$ ise artan bir fonksiyondur.

2°. $x=\mp\infty$ için fonksiyon $\frac{a}{a'}$, e; $x\to-\frac{b'}{a'}$ için de fonksiyon $\mp\infty$ a yaklaşır.

3°. Denklemleri $x=-\frac{b'}{a'}$ ve $y=\frac{a}{a'}$ olan doğrular eğrinin asimtotlarıdır. Eğri Ox eksenini ordinatı sıfır olan $x=-\frac{b}{a}$ noktasında, Oy eksenini de apsisi sıfır olan $y=\frac{b}{b'}$ noktasında keser.

**3. $y=\frac{ax+b}{a'+b'}$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği üzerine,**

**ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER:**

1. $y=\frac{x-2}{x+1}$ değişimi ve grafiği.

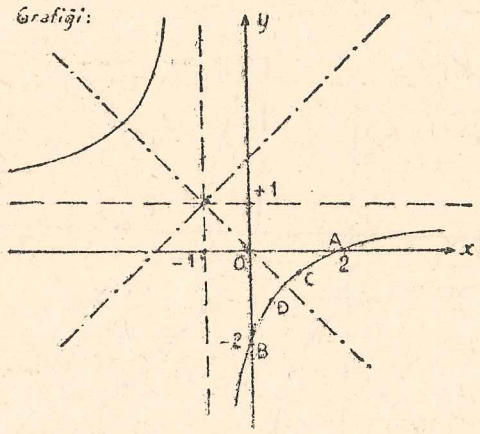
Bu fonksiyon, $x=1$ için kesiklidir, $x+1=X$ veya $x=X-1$ konulursa,

$$y=\frac{X-3}{X}=1-\frac{3}{x+1} \quad \text{olur.}$$

*Değişim tablosu:*

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{-3}{x+1}$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 |
| $y$ | 1 | $\nearrow$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $\nearrow$ | 1 |

$x=-1$ ve $y=+1$ asimtotları çizilirse,




elde edilir. Eğri Ox eksenini A (2, 0); Oy eksenini (B(0, — 2) noktasında keser. Daha net bir çizim için,

$$C\left(1,-\frac{1}{2}\right),\quad D\left(\frac{1}{2},-1\right)$$

gibi yardımcı noktalar da alınabilir.

2. $y=\frac{-3x+16}{5(x-2)}$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği.

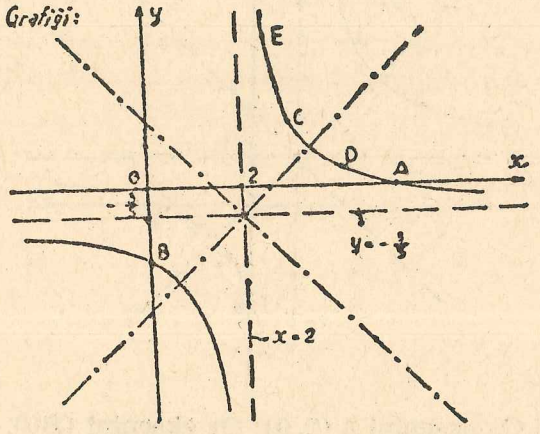
Fonksiyon $x = 2$ için kesiklidir. $x-2=X$ veya $x=2+X$ konulursa,

$$y=\frac{-6-3X+16}{5X}=-\frac{3}{5}+\frac{2}{X}=-\frac{3}{5}+\frac{2}{x-2}$$

elde edilir.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{x-2}$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty \mid +\infty$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y$ | $-\frac{3}{5}$ | $\searrow$ | $-\infty \mid +\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{5}$ |

$x = 2$ ve $y = -\frac{3}{5}$ asimtotları çizilirse,




elde edilir.

Eğri $Ox$ eksenini $A\left(\frac{16}{3}, o\right)$; Oy eksenini $B\left(o, -\frac{8}{5}\right)$ noktasında keser.

$C\left(3, \frac{7}{5}\right)$, $D\left(4, \frac{2}{5}\right)$, $E\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{5}\right)$ yardımcı nokta olarak alınmıştır.

3. $y=\frac{2x-5}{x-3}$ fonksiyonunun değişimi ve grafiği.

Bu fonksiyon $x=3$ için kesiklidir. $x-3=X$ veya $x=X+3$ konulursa.

$$y=\frac{2(X+3)-5}{X}=2+\frac{1}{X}=2+\frac{1}{x-3}$$

bulunur.

*Değişim tablosu:*

| $x$ | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x-3}$ | 0 | $\searrow$ | $-\infty \parallel +\infty$ | $\searrow$ | 0 |
| $y$ | 2 | $\searrow$ | $-\infty \parallel +\infty$ | $\searrow$ | 2 |

Bu fonksiyon $(-\infty, 3)$ ve $(3,+\infty)$ aralıklarında eksilen bir fonksiyondur. $x\to\infty$ için fonksiyon «2» ye yaklaşır. Grafiğini çiziniz.

4. $y=\frac{x-2}{2x-5}$ fonksiyonunu alalım. Fonksiyon $x=\frac{5}{2}$ için kesiklidir.

$$y=\frac{x-3}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}$$

şeklinde yazılır ve

$$x-\frac{5}{2}=X \text{ veya } x=X+\frac{5}{2} \quad \text{konulursa.}$$

$$y=\frac{X+\frac{5}{2}-3}{2X}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{4}}{X}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x-\frac{5}{2}}$$

bulunur.

*Değişim tablosu:*

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{4}$ / $x-\frac{5}{2}$ | 0 | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | ∋ |
| $y$ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ |

Bu fonksiyon $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ ve $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ aralıklarında belirli ve artan bir fonksiyondur. $x \to \infty$ için fonksiyon $\frac{1}{2}$ ye yaklaşır. Grafiğini çiziniz.

Özel hal: $ab' - ba' > 0$ ise Homografik fonksiyonun artan; $ab' - ba' < 0$ ise fonksiyonun eksilen olduğunu önceden söylemiştik. Şimdi $ab' - ba' = 0$ halini gözönüne alalım. $a'$ hipotezden sıfır olamıyacağından,

$$b = \frac{a\,b'}{a'}$$

olur. Buradan,

$$y = \frac{ax + \frac{a\,b'}{a'}}{a'x + b'} = \frac{a(a'x + b')}{a'(a'x + b')}$$

elde edilir. Burada,

1°. $x \neq -\frac{b'}{a'}$ değerler verilirse (yani $a'x + b' \neq 0$ ise) fonksiyon $y = \frac{a}{a'}$ sabit değerini alır.

2°. $x = -\frac{b'}{a'}$ olursa, y belirsizdir. Karşıt olarak, hem $ax + b = 0$ ve hem de $a'x + b' = 0$ olursa, $x = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}$ bulunur ve buradan,

$$ab' - ba' = 0$$

bağıntısı elde edilir.

Bu halde, grafik denklemleri $y = \frac{a}{a'}$ ve $x = -\frac{b'}{a'}$ olan iki doğruyu gösterir. Bu doğrular, genel halde, asimtotların denklemleridir. İncelediğimiz bu hale, Homografik fonksiyonun «ÖZEL» hali denilir.

4. ÖDEVLER:

**1. Aşağıdaki fonksiyonların değişimlerini inceleyiniz ve grafiklerini çiziniz.**

a) $y = \frac{x+2}{2x-5}$; $y = \frac{2x-5}{x+2}$.

b) $y = \frac{4x+1}{1-3x}$; $y = \frac{4x+1}{3x-1}$.

c) $y = \frac{3-x}{x}$; $y = \frac{x}{3-x}$.

d) $y = \frac{3x-6}{2(x-2)}$; $y = \frac{2x-4}{3x-6}$.

e) $y = \frac{x}{x+4}$; $y = \frac{x+4}{x}$.

Karşılıklı iki fonksiyonun grafiğini ayni eksenler üzerinde çiziniz ve birbirleriyle mukayese ediniz.

2. $y = \frac{ax-4}{x-3}$ fonksiyonu veriliyor:

Bu fonksiyon «a» nın hangi değerleri için artan; hangi değerleri için eksilendir. «a» nın hangi değerleri için bu fonksiyonun grafiği iki doğruyu gösterir (özel hal).

3. Aynı soruyu $y = \frac{ax-4}{x-a}$ fonksiyonu için de çözünüz.

4. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ üçüncü derece denklemi, $x^2 = -\frac{cx+d}{ax+b}$ şeklinde yazılabilir.

Bundan faydalanarak,

a) $x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

c) $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$

denklemlerinin köklerini grafik yardımiyle bulunuz.

5. x ; «0» dan + 2 ye kadar değiştiğine göre,

$$y = \frac{3x - 1}{x + 2}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

6. $x = 0$ için sıfır ve asimtotlarının denklemleri $y+2=0$ ve $x-3=0$ olan homografik fonksiyonu kurunuz, sonra değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.

7. $x = 1$ için sıfır, $x = 2$ için 1 ve bir asimtotunun da denklemi $x = 3$ olan homografik fonksiyonu kurunuz, sonra değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.

8. $xy - 2x + 3y - 1 = 0$ denkleminde «y»; «x» in fonksiyonudur. Bu fonksiyonun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.

9. $axy + 2x - 3y + 6 = 0$ denkleminde y; x in fonksiyonudur. «a» nın hangi değerleri için bu fonksiyon artan veya eksilendir ?

10. Aynı soruyu,

a) $xy + 2x + y - a = 0$

b) $xy + x - 2y + a = 0$

denklemleri için de çözünüz.

11. $(m + 1)x^2 - (m - 1)x + m - 3 = 0$ denklemi veriliyor. Bu denklemin diskrimanantı, köklerinin çarpımı ve toplamı, «m» nin fonksiyonu olarak, sırasiyle, $y_1$ , $y_2$ ve $y_3$ olsun. «m» bu denklemin köklerinin gerçek olduğu bölgelerde, değiştiğine göre, $y_1$ , $y_2$ ve $y_3$ fonksiyonlarının değişimlerini ve grafiklerini çiziniz. Grafik üzerinde denklemin köklerinin işaretlerini inceleyiniz.

12. Aynı soruyu,

$mx^2 - 3(m + 1)x + 3 - m = 0$ denklemi için çözünüz.

13. Oy eksenini ordinatı «m» olan noktada kesen ve osimtotlarının denklemleri,

$$x + 1 = 0\,;\quad y - 2 = 0$$

olan homografik fonksiyonu kurunuz. «m» nin hangi değerleri için fonksiyon artan ve eksilen fonksiyondur? «m» nin hangi değerleri için özel hale tekabül eder?

14. Aşağıdaki denklem sistemlerinin köklerini grafik yolu ile bulunuz.

a) $\begin{cases} xy + x - y + 1 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} xy - 2x - 3y = 0 \\ x^2 - y - x = 0 \end{cases}$

15. Bir doğru üzerinde bir O noktasiyle bu noktaya göre simetrik A, A' noktaları alınıyor. $OA = OA' = R$ ; A ve O arasında alının bir B noktasının apsisi $AB = x$ $(o < x < R)$ olsun. AO ve AA' çaplı daireler çizilir ve B noktasından AA' ye çizilen dikin birinci daireyi kestiği noktalar C ve D, ikincisini kestiği noktalar da M ve N olduğuna göre ;

$$y = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{MN}^2}$$

oranını x ve R cinsinden ifade ediniz. (R sabittir). x in fonksiyonu olan «y» nin değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.

$$\left(\text{Cevap: } y = \frac{R - x}{2R - x}\right)$$

16. Bir kenarı «a» olan ABC eşkenar üçgeninde A dan BC ye paralel bir doğru çiziliyor; bu doğru üzerinde A ya göre simetrik E ve F noktaları alınıyor. EC ve FB doğrularının, üçgenin içinde kesiştikleri nokta I olsun. $EA = AF = x$ ile gösterildiğine göre, $AI = y$ yi «a» ve «x» uzunlukları cinsinden hesap ediniz. x; «O» dan $+\infty$ a kadar arttığında y fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.

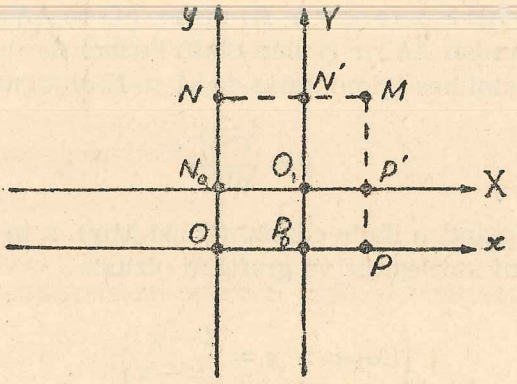
$$\left(\text{Cevap: } y = \frac{\sqrt{3}\,a\,x}{a + 2x}\right).$$

Ayni soruyu EC ve RB doğrularının I kesim noktası üçgenin dışında olduğuna göre çözünüz.

# YEDİNCİ BÖLÜM

## A. Koordinat eksenlerinin kendilerine paralel olarak kaydırılması.

1. Düzlemde Ox, Oy dik eksenler sistemine göre koordinatları (x,y) olan bir M noktası alalım. Koordinatları $(x_0, y_0)$ olan bir $O_1$ noktasından Ox, Oy eksenlerine paralel ve ayni yönlü $O_1X$, $O_1Y$ eksenler sistemine göre koordinatları da ($O_1P' = X$, $O_1N' = Y$) olsun.




Şekil : 12

Chasles bağıntısından (şekilden de kolayca görüleceği üzere) ;

$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P} \quad \text{veya} \quad x = x_0 + X$$

$$\overline{ON} = \overline{ON_0} + \overline{N_0N} \quad \text{veya} \quad y = y_0 + Y$$

bulunur.

Böylece, koordinat eksenlerinin kendilerine paralel olarak kaydırılmasiyle elde edilen,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \end{aligned}}$$

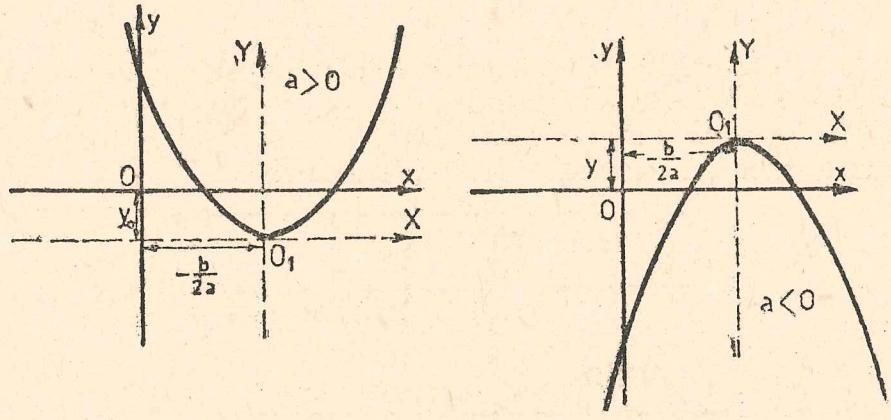
Değiştirme formülleri sayesinde fonksiyonları, uygun yeni bir başlangıç noktası seçerek, ekseriya, basit şekillere çevirmek mümkün olur.

ÖRNEKLER :

1. $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunu alalım Koordinatları,

$$\left(x_0 = -\frac{b}{2a},\quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

olan $O_1$ noktasından ilk sisteme, Ox, Oy eksenlerine $O_1X$, $O_1Y$ paralellerini çizelim (Şek. 13).




Şekil : 13

$y = ax^2 + bx + c$ eğrisi üzerinde alınan M(x, y) noktasının yeni eksenlere göre koordinatları X, Y ile gösterilirse (1) değiştirme formüllerinden,

$$x = X - \frac{b}{2a},\quad y = Y + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

yazılabilir. x ve y nin bu değerleri $y = ax^2 + bx + c$ de yerlerine konulur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$Y + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(X^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b}{a}X\right) + bX - \frac{b^2}{2a} + c,$$

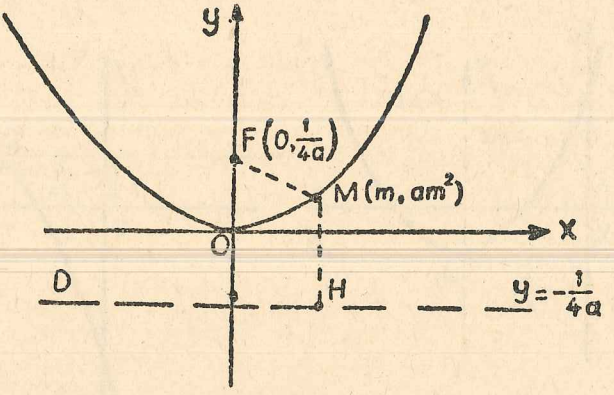
$$Y + \frac{4ac - b^2}{4a} = aX^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c,$$

$$Y + \frac{4ac - b^2}{4a} = aX^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

ve son olarak,

$$Y = aX^2$$

şekline çevrilmiş bulunur. Şimdi, genel olarah, grafiği Oy eksenine göre simetrik olan $y = ax^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Gösterdiği eğri de çizilmiş olsun (Şek. 14). Oy ekseni üzerinde ordinatı $\frac{1}{4a}$ olan bir F noktası alalım ve Ox eksenine paralel ve denklemi $y = -\frac{1}{4a}$ olan bir D doğrusu çizelim. $y = ax^2$ eğrisi üzerinde apsisi «m» ve ordinatı $y = am^2$ olan herhangi bir M noktası alalım. M noktasının F noktasına ve D doğrusuna olan MF ve MH uzaklıkları hesap edilirse,




Şekil : 14

$$\overline{MF}^2 = \left(am^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 + m^2 = a^2m^4 + \frac{m^2}{2} + \frac{1}{16a^2}$$

$$\overline{MF}^2 = \left(am^2 + \frac{1}{4a}\right)^2,$$

$$\overline{MF} = am^2 + \frac{1}{4a}, \quad \text{ve} \quad \overline{MH} = am^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right) = am^2 + \frac{1}{4a}$$

bulunur. Buradan MF = MH sonucuna varılır. O halde $y = ax^2$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin her noktası sabit bir F noktasiyle sabit bir D doğrusundan eşit uzaklıktadır. Sabit bir nokta ile sabit bir doğrudan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri olan eğriye - tarif olarak - **Parabol** denir. Sabit F noktasına parabolün **Odak noktası**, D doğrusuna da **Doğrultman'ı** adı verilir.

**Sonuç** — Yukarıda $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun $O_1\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ noktasından ilk eksenlere paralel yeni dik eksenler sistemine göre, $Y = aX^2$ şekline çevrilebileceğini göstermiştik $Y = aX^2$ fonksiyonunun da bir parabol gösterdiğini biraz önce söylediğimize göre ;

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği de tepe noktası

$$O_1\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

noktasına kaymış bir paraboldür.

2. $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ (1) homografik fonksiyonunu alalım. Koordinatları

$$\left(x_0 = -\frac{b'}{a'}, \quad y_0 = \frac{a}{a'}\right)$$

olan $O_1$ noktasından ilk Ox, Oy eksenlerine $O_1X$, $O_1Y$ paralellerini çizelim. (1) homografik fonksiyonunun gösterdiği eğri üzerinde alınan bir M (x, y) noktasının yeni eksenlere göre kordinatları X, Y ile gösterilirse, değiştirme formüllerinden;

$$x = X - \frac{b'}{a'}, \quad y = Y + \frac{a}{a'}$$

yazılabilir. M noktasının x ve y koordinatlarının bu değerleri (1) de yerlerine konursa,

$$Y + \frac{a}{a'} = \frac{a\left(X - \frac{b'}{a'}\right) + b}{a'\left(X - \frac{b'}{a'}\right) + b'} = \frac{aX + \frac{a'b - ab'}{a'}}{a'X}$$

$$Y + \frac{a}{a'} = \frac{a}{a'} + \frac{\frac{a'b - ab'}{a'}}{a'X} \quad \text{ve buradan,}$$

$$Y = \frac{\frac{a'b - ab'}{a'^2}}{X} \quad \text{yazılır ve,}$$

$\frac{a'b - ab'}{a'^2} = A$ denilirse, (1) homografik fonksiyonu, $Y = \frac{A}{X}$ şekline çevrilmiş olur. O halde, Ox, Oy eksenlerine göre denklemi $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ şeklinde olan homografik bir fonksiyonun, $O_1\left(-\frac{b'}{a'}, \frac{a}{a'}\right)$ noktasından ilk sisteme paralel çizilen ($O_1X$, $O_1Y$) yeni eksenlere göre denk-

lemi $Y = \frac{A}{X}$ dır. Bu sonuncu fonksiyonun grafiğinin nasıl çizildiğini ve bir hiperbol gösterdiğini incelemiştik. Buradan, $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ fonksiyonunun asimtotları, $x = -\frac{b'}{a'}$ ve $y = \frac{a}{a'}$ olan ikizkenar hiperbol gösterdiği sonucuna varılır.

3. $y^2 - 2y - 3x - 5 = 0$ denkleminin, ilk eksenlere paralel ve $(-2\,;\,1)$ noktasında kesişen yeni eksenlere göre denklemini yazınız.

Burada, $O_1\,(-2;\,1)$ dir. Değiştirme formüllerine göre,

$$y = -2 + X$$
$$y = 1 + Y$$

dir. Bu değerler verilen denklemde yerlerine konulursa,

$$(1 + Y)^2 - 2\,(1 + Y) - 3\,(-2 + X) - 5 = 0$$

ve sadeleştirilirse,

$$Y^2 = 3X$$

parabolüne çevrilmiş olur.

ÖDEVLER :

1. $O_1(1, 2)$ noktasından Ox, Oy eksenlerine $O_1X$, $O_1Y$ paralel eksenleri çiziliyor. Aşağıdaki doğruların yeni kesenlere göre denklemlerini yazınız :

a) $y = x$; $\quad y = -\frac{1}{2}x$; $\quad y = 3x$

b) $y = \frac{3}{2}x$; $\quad y = \frac{2}{3}x + 2$; $\quad y = 0{,}5x - 1$

c) $y = -3x + 4$; $\quad y = -\frac{2}{5}x - 1$; $\quad y = 3x - 5$.

2. $O_1(2; -1)$ noktasından Ox, Oy eksenlerine $O_1X$, $O_1Y$ paralelleri çiziliyor. Aşağıdaki parabollerin yeni eksenlere göre denklemlerini yazınız :

a) $y = 2x^2$; $\quad y = -\frac{2}{3}x^2$; $\quad y = x^2 - 5$

b) $y = -2x^2 + 3$; $\quad y = x^2 - 3$; $\quad y = \frac{1}{3}x^2 + 1$

c) $y = x^2 - 4x + 3$; $\quad y = x^2 - 6x + 9$ $\quad y = -x^2 + 3x - 2$.

3. $O_1(-2; 3)$ noktasından Ox, Oy eksenlerine $O_1X$, $O_1Y$ paralelleri çiziliyor. Aşağıdaki fonksiyonların yeni eksenlere göre denklemlerini yazınız:

a) $y=\frac{3}{x}$; $y=-\frac{2}{x}$; $y=\frac{0,5}{x}$

b) $y=\frac{3}{2x}$; $y=-\frac{2}{3x}$; $y=-\frac{1}{x}$

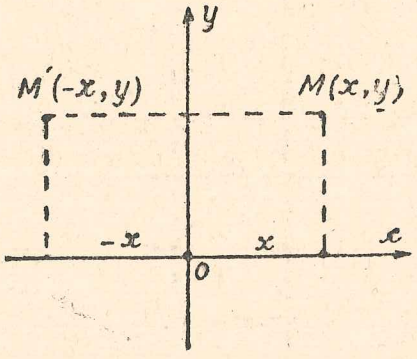
c) $y=\frac{3x-1}{x+3}$; $y=\frac{-x+3}{2x-5}$ $y=\frac{2x+5}{-3x+2}$

4. Bundan önceki bölümde $y=ax^2+bx+c$ veya $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ şeklindeki fonksiyonların grafiklerini; $Y=aX^2$ veya $Y=\frac{A}{X}$ şekline çevirerek çiziniz.

## B. Koordinat eksenlerine, başlangıç noktasına, koordinat eksenlerinin açı ortaylarına göre simetri.

1. Bu eğrinin çiziminde simetri özelliklerinden, ekseriya faydalanılabilir. Şimdi simetri hallerinden başlıcalarını inceliyelim.

### 1°. Oy eksenine göre simetri.



Ox, Oy dik eksenler sisteminde, koordinatları (x, y) olan bir M noktasının OY eksenine göre simetriği M′ olsun (Şek. 15). M′ noktasının koordinatları, şekilden kolaylıkla görüleceği üzere, M′ (—x, y) dir. Buradan, bir y = f(x) fonksiyonunda, x yerine «—x» konulduğu zaman y değişmiyorsa, yani f(x) = f(—x) ise, bu fonksiyonun gösterdiği eğri Oy eksenine göre simetriktir denir. Çünkü, böyle bir eğri üzerinde, bir M(x, y) noktasına, yine eğri üzerinde bir M′(—x, y) noktası tekabül eder.

ÖRNEKLER:

$$y = ax^2, \qquad y = \cos x, \qquad y = \frac{2x^2+1}{x^2-1}, \qquad y = 3x^2-2$$

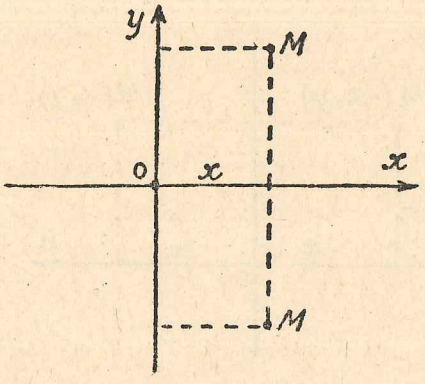
fonksiyonları OY eksenine göre simetriktirler. Çünkü bu fonksiyonlar x = ∓ x için aynı değeri alırlar.

**Tarif. — OY eksenine göre simetrik olan fonksiyonlara** — bu fonksiyonlar da f(x) = f(—x) dir. — ÇİFT FONKSİYON denir.

Bu çeşit fonksiyonların grafiklerini çizerken x a sadece pozitif değerler verilmeli ve böylece çizilecek eğri kolunun O y eksenine göre simetriği alınmalıdır.

**2°. Ox eksenine göre simetri.**

Bir dik eksenler sisteminde, koordinatları (x, y) olan bir M noktasının Ox eksenine göre simetriği M′ olsun (Şek. 16). M′ noktasının koordinatları, şekilden de görüleceği üzere, M′(x, —y) dir; yani yalnız ordinat simetrik değer alır, apsis değişmez. Buradan, bir y = f(x) fonksiyonunda «y» yerine «— y» konulduğu zaman fonksiyon değişmiyorsa, fonk-

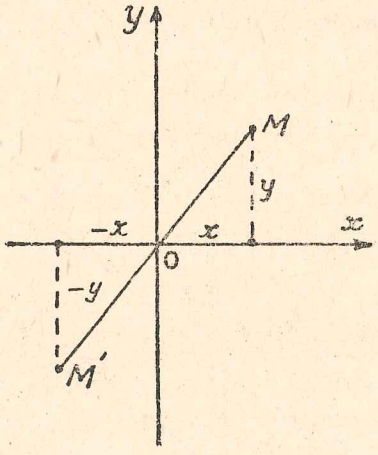


siyonun gösterdiği eğri Ox eksenine göre simetriktir denir. Çünkü, böyle bir eğrinin her M (x, y) noktasına yine eğri üzerine bir M'(x,—y) noktası tekabül eder.

$y^2 = 2px$ parabolü Ox eksenine göre simetriktir.

**3°. Başlangıç noktasına göre simetri.**

Ox, Oy dik eksenler sisteminde, koordinatları (x, y) olan bir M noktasının O başlangıç noktasına göre simteriği M' olsun (Şek. 17). M' noktasının koordinatları, şekilden de görüleceği üzere, M'(—x, —y) dir, yani apsis ve ordinat simetrik değerler alır. Buradan, bir $y = f(x)$ fonksiyonunda «x» yerine «— x» ve «y» yerine «—y» konulduğu zaman, fonk-




Şekil : 17

siyon değişmiyorsa, fonksiyonun gösterdiği eğri «O» başlangıç noktasına göre simetriktir denir. Çünkü, böyle bir eğrinin bir M(x, y) noktasına bir M'(—x, —y) noktası tekabül eder.

ÖRNEKLER :

$$y=x;\quad y=x^3;\quad y=x\sqrt{1+x^2};\quad y=\sin x;$$

$$x^2+y^2=a^2;\quad y=\frac{a}{x}\cdot$$

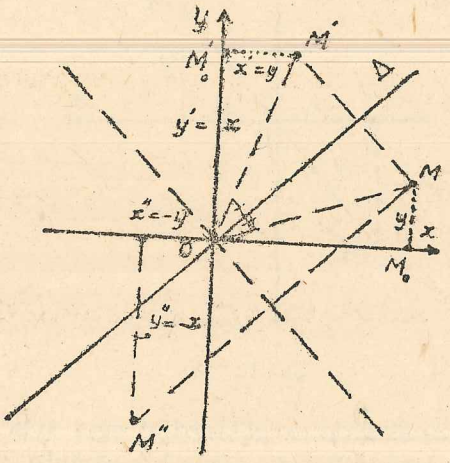
fonksiyonları «O» başlangıç noktasına göre simetriktirler.

**Tarif. — Bir f(x) fonksiyonunda f(—x) = —f(x) ise, — «O» başlangıç noktasına göre simetrik demektir — bu fonksiyona TEK FONKSİYON denir.**

Bu çeşit fonüsiyonların grafiklerini çizerken x a sadece jozitif değerler vermeli ve böylece çizilecek eğri kolunun «O» noktasına göre simetriği alınmalıdır.

**4°. Koordinat eksenlerinin açı ortayına göre simetri.**

Ox, Oy dik eksenler sisteminde, koordinatları (x, y) olan bir M noktasının, eksenlerin birinci açıortayına göre simetriği M′ olsun (Şek. 18). M′ noktasının koordinatları, $OM_0M$ ; $OM'_0M'$ dik üçgenlerinin eşitliğinden, M′(x′ = y ; y′ = x) dir. Buradan, bir y = f(x) fonksiyonunda x ye-




Şekil : 18

rine «+ y»; y yerine «+ x» konulduğu zaman fonksiyon değişmiyorsa, fonksiyonun gösterdiği eğri birinci açıortaya göre simetriktir denir. Çünkü, böyle bir eğrinin her M (x, y) noktasına, koordinatları (x′ = y ; y′ = x) olan bir M′ noktası tekabül eder. M noktasının ikinci açıortaya göre simetriği $M_0''$ noktasının koordinatları (x″ = —y ; y″ = —x) olduğunu gösteriniz ve buradan bir fonksiyonun ikinci açıortaya göre simetriğine ait kaideyi söyleyiniz.

ÖDEVLER :

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin Oy eksenine ve hangisinin başlangıç noktasına göre simetrik olduğunu gösteriniz :

a. $y=(x-1)^2+(x+1)^2$; $y=\dfrac{1+x^2}{x}$; $y=x(x-2)(x+2)$;

b. $y=x\cos x$; $y=\sin 2x$; $y=x\sin x$;

$y=a^x+a^{-x}$.

2. $y=\dfrac{a}{x}$, $y=-\dfrac{a}{x}$ fonksiyonlarının Ox eksenine göre simetrik olduklarını gösteriniz.

3. $x^2+y^2=a^2$; $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; $xy=a^2$ fonksiyonlarının simetri merkezlerini, simetri eksenlerini bulunuz; eksenleri açıortaylarına göre simetrik midirler?

4. $y=ax^2+bx+c$ eğrisinin $x=-\dfrac{b}{2a}$ doğrusuna göre simetrik olduğunu gösteriniz.

5. $y=x^2-4x-5$; $y=-3x^2+7x+1$; $y=x^2-5x+7$; $y=-3x^2+4$; $y=5x^2+6x$ eğrilerinin simetri eksenlerini bulunuz.

6. $y=\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ eğrisinin simetri merkezini ve simetri eksenlerini bulunuz.

7. $y=\dfrac{3}{x}$; $y=-\dfrac{3}{x}$; $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$; $y=\dfrac{5x}{2x+3}$

$y=-\dfrac{3}{3x+2}$; $y=\dfrac{2x+1}{3x}$; $y=\dfrac{2x}{3x-1}$

eğrilerinin simetri özelliklerini söyleyiniz.

8. $y=\dfrac{3x-7}{x-3}$ fonksiyonunun,

a) S(1, 2); b) S(1, 1) merkezlerine göre simetrik olan fonksiyonlarını yazınız ve grafiklerini de ayni dik eksenlere göre çiziniz.

(Yol gösterme: S(1, 2) olduğuna göre, $x=X+1$ ; $y=Y+2$. Bu değerler fonksiyonda yerine konulur. $Y+2=\frac{3(X+1)-7}{X+1-3}$ sadeleştirilirse, $Y=\frac{X}{X-2}$ bulunur.

Yeni orijin «S» ye göre, eğri simetri olacağından : $-Y=\frac{-X}{-X-2}$ olur. X ve Y yerine yukardan eşitlikleri yazılırsa,

$$y-2=\frac{-(x-1)}{x-1-2}; \quad y=\frac{x+3}{x+1}$$ elde edilir).

9. $y = x^2 - 4x + 4$ fonksiyonunun $S(2, -2)$ merkezine göre simetrik olan fonksiyonunu yazınız ve grafiğini çiziniz.

10. $y = x^2 - 8x + 12$ fonksiyonunun $x = 4$ doğrusuna göre simetrik olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme: $x = 4$ için $y = -4$, $S(4, -4)$ yeni orijine göre denklemi $y = x^2$ dir).

11. $y=\frac{x+1}{x-2}$ fonksiyonunun S(3, 4) noktasına göre simetrik fonksiyonunu yazınız ve grafiğini çiziniz.

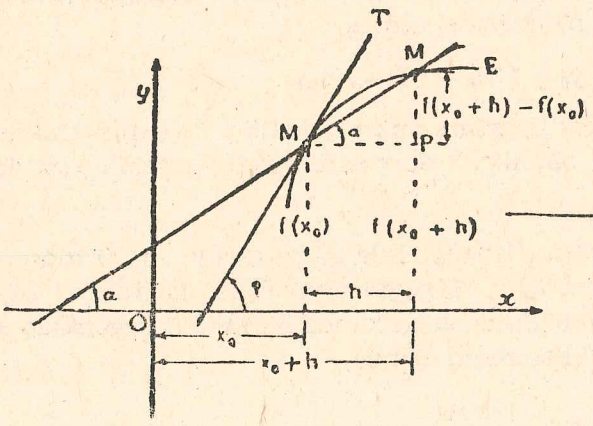
$$\left(\text{Cevap: } y=\frac{7x-25}{x-4}\right).$$

12. $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ fonksiyonları birinci açıortaya göre simetrik fonksiyonlardır, neden ?

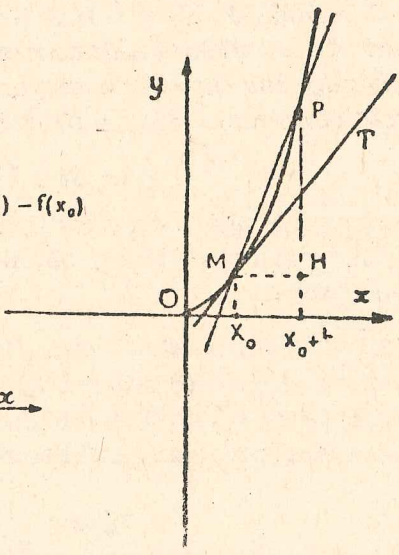
## SEKİZİNCİ BÖLÜM

### Türevin geometrik tarifi ve anlamı

**1. Teğet tarifi.** — Bir E eğrisi üzerinde sabit bir M noktasiyle, buna yakın diğer bir M′ noktasını alalım, ve MM′ kesenini çizelim. M′ noktası eğri üzerinde, M noktasına istenildiği kadar yaklaştırıldığında kesenin aldığı MT limit durumuna, eğrinin M noktasındaki teğeti denir (Şek. 19).




Şekil : 19




Şekil : 20

**Örnek.** — $y = x^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım (Şek. 20). Eğri üzerinde apsisi $x = x_0$ olan M noktasının ordinatı $y_0 = x_0^2$ dir. Eğri üzerinde apsisi $x = x_0 + h$ olan diğer bir P noktasının ordinatı da,

$$y_1 = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2hx_0 + h^2 \qquad \text{olur.}$$

MP keseninin eğimi,

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{MH}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{h^2 + 2hx_0}{h} = 2x_0 + h.$$

bulunur.

P noktası M ye istenildiği kadar yalaştırıldığında, MP keseninin limit durumu eğrinin M noktasındaki teğeti olur. Bu durumda h sıfıra yaklaştığında MP nin eğimi olan $2x_0+h$ de $2x_0$'a yaklaşır; yani eğrinin M noktasındaki teğetinin eğimi $2x_0$ olur. Buna göre, eğrinin $M(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi $2x_0$ olan bu teğetinin denklemi,

$$y - y_0 = 2x_0 (x - x_0) \quad \text{dır.}$$

$M(x_0 = 1, y_0 = 1)$ ise, denklem, $y = 2x - 1$ olur.

2. **Artma miktarları.** — Yukarıdaki örnekte x a önce $x = x_0$, sonra ikinci bir $x = x_0 + h$ değerini verdik. Burada, h ye x in, yani değişkenin, artma miktarı denir.

Genel olarak, bir $y = f(x)$ fonksiyonunda x a verilen iki $x_0$ ve $x_0+h$ değerleri arasındaki h farkına x in, yani değişkenin, artma miktarı denir. x in $x_0$ değerine karşılık fonksiyon $y_0 = f(x_0)$ ve x in $x_0 + h$ değerine karşılık fonksiyon $y_1 = f(x_0 + h)$ değerini alırsa,

$$y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

farkına y nin, yani fonksiyonun, artma miktarı denilir. Bu artma miktarı pozitif, negatif veya sıfır olabilir. h de pozitif veya negatif küçük bir sayıyı gösterir.

3. **Türevin tarifi.** — (Şek. 19) da E ile gösterilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde sabit bir $M(x_0, y_0)$ noktasiyle ona yakın hareketli bir $M'(x_1, y_1)$ noktasını alalım. Bu durumda MPM' dik üçgeninde $\alpha$ açısının tangenti (yani MM' keseninin eğimi),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{dir.}$$

Bu bağıntı $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 + h)$ ve $x_1 - x_0 = h$ yazılarak,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada, h sıfıra doğru yaklaştırıldığında M' noktası M sabit noktasına yaklaşır ve MM' doğrusu eğrinin M noktasındaki MT teğet durumunu alır. MT teğetinin eğimi ise, kesenin eğimini veren (1) ifadesinin limiti (şayet bir limit değer mevcut ise) olacağı cihetle,

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (2)$$

dır.

Böylece, eğri üzerinde alınan bir M noktasındaki teğetin eğimine, fonksiyonun o noktadaki türevi denir. Türev, ekseriya, $f'(x)$ veya $y'$ sembolleriyle gösterilir. Türevin tarifi genel olarak şöyle ifade edilebilir.

$y = f(x)$ eğrisi üzerinde $x = x_0$ apsisli noktadan, eğriye çizilen teğetin eğimine fonksiyonun $x = x_0$ için türevi denir. Başka bir deyimle, bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimine, eğriyi veren, fonksiyonun o noktadaki türevi denilir.

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ apsisli noktasındaki türevini, pratik olarak, hesap etmek için;

1°. x'a, $x_0$ ve $x_0 + h$ değerleri verilir.

2°. Fonksiyonun bu değerlere karşı aldığı $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0+h)$ değerleri bulunur.

3°. $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, yani fonksiyonun artma miktarı, değişkenin, x in artma miktarına oranı teşkil olunur.

4°. Bu oranda gerekli kısaltmalar yapılır.

5°. h artma miktarı sıfıra yaklaştırılır; bu takdirde, yukarıki oranın bir limit değeri varsa, bu değer eğrinin $(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetinin eğimini, yani fonksiyonun $x = x_0$ için türevini verir.

ÖRNEKLER:

1. $y = ax + b$ nin türevi.

Fonksiyonda x'a $x_0$ ve $x_0 + h$ değerleri verilirse, $f(x_0) = ax_0 + b$; $f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b$ olur. Buradan fonksiyonun artma miktarı.

$f(x_0+h) - f(x_0) = a(x_0+h) + b - (ax_0+b) = ah$ dır. Fonksiyonun artma miktarının, değişkenin artma miktarına oranı $\frac{ah}{h} = a$ bulunur ki $x_0$ ve h ne olursa olsun bu değer sabittir. O halde $y = ax + b$ fonksiyonunun türevi «a» dır. Bilindiği üzere «a» doğrusal fonksiyonun eğimidir; ve bir doğrunun her M noktasındaki teğetinin doğru ile çakıştığı da aşikârdır.

2. $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun türevi. Burada, x'a $x_0$ ve $x_0+h$ değerleri verilirse, fonksiyonun artma miktarı,

$$f(x_0+h) - f(x_0) = a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c);$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h(2ax_0 + b + ah)$$

bulunur. Bu artma miktarı x in h artma miktarına oranlanırsa,

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 2ax_0 + b + ah$$

elde edilir. h sıfıra yaklaştırılırsa, bu oranın limit değeri,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 2ax_0 + b$$

sonucu elde edilir ($h \to 0$ için $ah \to 0$ olacağı gözden kaçmamalıdır). O halde yukarıdaki fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki türevi,

$$f'(x_0) = 2ax_0 + b \quad \text{dir.}$$

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ eğrisi üzerinde bulunan apsisi $x_0$ olan noktadan, eğriye çizilen teğetin denklemi, $x = x_0$ için $y = y_0$ ise,

$$y - y_0 = f'(x_0)[x - x_0] \quad \text{veya,}$$

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0),$$

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + y_0$$

bulunur.

**Alıştırma.** — $y = x^2 - 4x + 3$ eğrisine üzerinde alınan apsisi $x_0 = 3$ olan noktadan, eğriye, çizilen teğetin denklemini yazınız.

Eğri üzerindeki noktanın apsisi «3» olduğuna göre ordinatı, $y = 9 - 12 + 3 = 0$ dır. Fonksiyonun $x = 3$ noktasındaki türevi de;

$f'(x_0) = 2ax_0 + b$ den, $f'(x_0) = 2.1.x_0 - 4 = 2x_0 - 4$ ve $x_0 = 3$ olarak verildiğinde, $f'(3) = 2.3 - 4 = 2$ dir. Buna göre, aranılan teğetin denklemi,

$$y = 2(x - 3) \quad \text{tür.}$$

Aynı eğrinin $x_0 = 5$ noktasındaki teğetinin denklemi,

$$y - 8 = 6(x - 5) \quad \text{veya,}$$

$$y = 6x - 24 \quad \text{tür.}$$

3. $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunun türevi.

x'a, $x_0$ ve $x_0 + h$ değerleri verilirse, ($x_0 \neq 0$ olması şarttır, neden?) y nin artma miktarı;

$$\frac{a}{x_0+h} - \frac{a}{x_0} = \frac{-ah}{x_0(x_0+h)} \quad \text{dır.}$$

Artma miktarlarının oranı da;

$$\frac{-ah}{x_0(x_0+h)\cdot h} = \frac{-a}{x_0^2+x_0h} \quad \text{olur.}$$

h sıfıra yaklaştığında, $x_0$ h sıfıra yaklaşır ve türev,

$$f'(x_0) = \frac{-a}{x_0^2}$$

elde edilir. Eğri üzerindeki bu noktadan geçen teğetin denklemi ise,

$$y - y_0 = -\frac{a}{x_0^2}(x - x_0) \quad \text{dır.}$$

**Alıştırma.** — $y = -\frac{2}{x}$ eğrisinin üzerinde alınan $x_0 = -2$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

$x_0 = -2$ için $y_0 = +1$ dir. Türev ise,

$$f'(-2) = -\frac{-2}{(-2)^2} = \frac{1}{2}$$

dir. Aranılan teğetin denklemi de,

$$y-1 = \frac{1}{2}(x+2),$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{dır.}$$

4. $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ fonksiyonunun türevi.

x'a $x_0$ ve $x_0+h$ değerleri verilirse, $\left(x_0 \neq -\frac{b'}{a'}\right.$ olmalıdır, neden?$\left.\right)$

y nin artma miktarı,

$$y_1 - y_0 = \frac{a(x_0+h)+b}{a'(x_0+h)+b'} - \frac{ax_0+b}{a'x_0+b'} = \frac{(ab'-ba')h}{[a'(x_0+h)+b''][a'x_0+b']}$$

dır. Artma miktarlarının oranı ise,

$$\frac{ab'-ba'}{[a'(x_0+h)+b'][a'x_0+b']} \quad (A) \quad \text{olur.}$$

1°. $ab' - ba' \neq 0$ ise, $\frac{ab' - ba'}{a'x_0 + b'}$ sayısı «h» ye bağlı değildir, h sıfıra doğru yaklaşırsa $a'(x_0+h)+b'$, $a'x_0+b'$ ye yaklaşır. Buradan, $h \to 0$ için A oranının limit değeri, yani türev,

$$y' = f'(x_0) = \frac{ab' - ba'}{(a'x+b')^2} \quad (B) \quad \text{bulunur.}$$

Eğriye $x_0$ apsisli noktasından çizilen teğetin denklemi de,

$$y - y_0 = \frac{ab' - ba'}{(a'x_0+b')^2}(x - x_0) \quad \text{dır.}$$

2°. $ab' - ba' = 0$ ise, (A) oranı $x \neq -\frac{b'}{a'}$ her değer için sıfır olacağından türev de sıfır olur. Bu özel halde fonksiyonun Ox eksenine paralel $\left( x \neq -\frac{b'}{a'} \text{ için} \right)$ bir doğru gösterdiğini biliyoruz, doğrunun eğimi «0» dır. Buradan Ox eksenine paralel her doğrunun (yani denklemi $y = a$ sabit), türevi sıfırdır. Bu özelliğin karşıtını ifade ediniz.

**Alıştırmalar.** — 1°. $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$ eğrisinin $x = 2$ noktasından çizilen teğetinin denklemini yazınız.

$$x_0 = 2 \quad \text{için} \quad f(2) = \frac{3}{5} \quad \text{ve} \quad f(2+h) = \frac{3+2h}{5+h}.$$

y nin artma miktarı, $\frac{3+2h}{5+h} - \frac{3}{5} = \frac{7h}{5(5+h)}$ dır.

Artma miktarlarının oranı ise,

$$\frac{7}{25+5h} \quad \text{olur.}$$

h sıfıra yaklaşırsa, bu oran $\frac{7}{25}$ e yaklaşır. O halde, fonksiyonun $x = 2$ için türevi $\frac{7}{25}$ dir. Bu noktadaki teğetin denklemi,

$$y - \frac{3}{5} = \frac{7}{25}(x-2),$$

$$y = \frac{7}{25}x + \frac{1}{25} \quad \text{dir.}$$

Türevin değerini ve teğetin denklemini, yukarıda bulunan formüllerden de çıkarınız.

2°. $y=\frac{2x-5}{x-3}$ fonksiyonunun $A\left(x=0,\ y=\frac{5}{3}\right)$ ve $B\left(x=\frac{5}{2},\ y=0\right)$ noktalarındaki teğetlerinin denklemlerini yazınız.

Bu fonksiyonun bir $x_0$ noktasındaki türevi (B) den,

$$f'(x_0)=\frac{-1}{(x_0-3)^2} \quad \text{dir.}$$

A noktasındaki türev, $f'(0)=\frac{-1}{9}$ ; teğet denklemi,

$$y-\frac{5}{3}=-\frac{1}{9}x \quad \text{veya} \quad y=-\frac{1}{9}x+\frac{5}{3} \quad \text{tür.}$$

B noktasındaki türev, $f'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{-1}{\left(\frac{5}{2}-3\right)^2}=-4$; teğet denklemi,

$$y=-4\left(x-\frac{5}{2}\right) \quad \text{dir.}$$

ODEVLER :

1. Türevin tarifinden faydalanarak, aşağıdaki fonksiyonların türevlerini alınız :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x=2$ | ve | $x=-2$ | için | $y=x+1$ |
| $x=-1$ | ve | $x=+1$ | için | $y=x^2+1$, |
| $x=0$ | ve | $x=1$ | » | $y=x^3$, |
| $x=1$ | ve | $x=-1$ | » | $y=\frac{x-2}{x}$, |
| $x=3$ | ve | $x=-5$ | » | $y=\frac{x}{x+1}$, |
| $x=4$ | ve | $x=-1$ | » | $y=2x^2-3x+5$. |

2. Formülleri uygulayarak aşağıdaki fonksiyonların $x=x_0$ için türevlerini hesap ediniz :

$$y=\frac{3-x}{x+2}, \quad y=\frac{x+1}{x}, \quad y=3x^2-2x-1, \quad y=\frac{3x+1}{x-2}.$$

3. $y=-\frac{1}{x}$ eğrisinin simetri eksenlerini kestiği noktaları bulunuz ve bu noktalardan eğriye çizilen teğetlerin denklemlerini yazınız.

4. $y = \frac{1}{x}$ eğrisini çiziniz $x = 1$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız. $x = a, x = \frac{1}{a}$ noktasından da eğriye çizilen teğetlerin denklemlerini yazınız; a değiştiğinde bu sonuncu teğetlerin kesim noktalarının geometrik yerini bulunuz.

5. $y = \frac{x^2}{4}$ eğrisine $x = a$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız. Eğri üzerinde ordinatı $+1$ olan noktadan çizilen teğetlerin denklemlerini yazınız ve bu iki teğetin dik olduğunu gösteriniz.

6. $y = \frac{x^2}{4}$ (C) eğrisiyle $y = mx + 1$ (D) doğruları gözönüne alınıyor (m bir parametredir) :

1°. «m» ne olursa olsun, her (D) doğrusunun (C) eğrisini A ve B gibi iki noktada kestiğini gösteriniz.

2°. A ve B noktalarının x′ ve x″ pasisleri arasında, m ye bağlı olmıyan, nasıl bir bağıntı vardır ?

3°. Eğriye A ve B noktalarından çizilen teğetlerin birbirine dik olduğunu gösteriniz.

4°. «m» değiştiğinde bu teğetlerin kesim noktasının geometrik yerini bulunuz.

7. $y = ax^2$ (C) eğrisi çiziliyor. Bu eğrinin apsisi «m» olan noktası M olsun.

1°. M nin koordinatlarını bulunuz. M den (C) eğrisine çizilen teğetin eğimi nedir? Bu teğetin denklemini yazınız.

2°. Teğet Ox eksenini P ve Oy eksenini P′ de kestiğine göre P ve M nin apsislerini ve P′ ile M nin ordinatlarını karşılaştırınız.

3°. P den teğete çizilen dik doğrunun sabit bir noktadan geçtiğini gösteriniz.

8. $y = \frac{a}{x}$ (C) eğrisi çiziliyor. Bu eğrinin apsisi «m» olan noktası M olsun.

1°. M nin koordinatlarını bulunuz. (C) eğrisinin M noktasındaki teğetinin denklemini yazınız.

2°. Teğetin Ox ve Oy eksenlerini kestiği noktalar T ve T′ olsun. «m»

değiştiğinde, M noktasının TT' nün ortası ve OTT' üçgeninin alanının sabit olduğunu gösteriniz.

9. 1°. $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun gösterdiği eğri A(—4;0); B(0;—2); C(1;0) noktalarından geçtiğine göre, a, b, c yi bulunuz, sonra eğriyi (P) çiziniz ve bu eğriye A, B,C noktalarından çizilen teğetlerin eğimlerini bulunuz.

2°. (P) eğrisinin A ve B noktalarındaki teğetlerinin K kesim noktasından eğimi «m» olan bir (D) doğrusu çiziliyor. D doğrusunun denklemini yazınız; kökleri (D) nin (P) yi kestiği noktaların apsislerini veren (E) ikinci derece denklemini kurunuz.

3°. «m» nin değerlerine göre, (E) denkleminin x' ve x'' köklerinin varlığını ve işaretlerini münakaşa ediniz.

x' = x'' olduğuna göre m, x' ve x'' yü bulunuz.

10. 1°. $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + 1$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve grafiği (C) yi, çiziniz.

2°. y = m doğrusu (D) olsun. (C) ve (D) nin ortak noktalarının apsislerini veren denklemi yazınız. «m» nin değerlerine göre (D) ve (C) nin kesim noktalarının sayısını irdeleyiniz. Kesim noktaları $T_1$ ve $T_2$ nin koordinatlarını bulnuz; $OT_1$ ve $OT_2$ nin (C) ye teğet olduklarını gösteriniz; bu teğetlerin birbirine dik olduğunu görünüz.

3°. Koordinatları (x = 2; y = 2) olan nokta F olsun. (C) eğrisinin herhangi bir M noktasının ordinatına bağlı olarak MF uzaklığını hesabediniz ve buradan (C) eğrisi üzerindeki noktaların geometrik özelliğini çıkarınız.

11. $y = \frac{a}{x}$ fonksiyonunun, sıfırdan farklı $+x_0$ ve $-x_0$ noktalarındaki teğetleri için ne denilebilir ?

12. $y = \frac{1}{x}$ eğrisinin y = 1 — 4x doğrusuna paralel teğetinin denklemini yazınız. (Yol gösterme : Değme noktasının apsisini $-\frac{1}{x_0^2} = -4$ bağıntısiyle bulunuz).

13. $y = \frac{x^2}{4} - 2x - 5$ eğrisini çiziniz ve bu eğrinin;

1°. $\widehat{xoy}$ nın açıortayına,

2°. $\widehat{xoy'}$ nın açıortayına,

paralel teğetlerinin denklemlerini yazınız.

14. $y = x^2 - 2mx - 1$ parabolü ile $y = \frac{1 - mx}{x - 1}$ ikizkener parabolü gözönüne alınıyor :

1°. Bu iki eğrinin sabit bir A noktasından geçtiklerini gösteriniz.

2°. A noktasından her iki eğriye çizilen teğetlerin eğimlerini bulunuz. Bu teğetlerin çakışabilmesi için «m» ne değer almalıdır ?

3°. «m» nin bulunan bu değerine göre her iki eğrinin grafiğini çiziniz. (Apsis ve ordinat için 3 cm yi birim uzunluk alınız). Bu iki eğrinin A dan başka ortak noktaları var mıdır ?

15. $y = \frac{x - 1}{2x - 1}$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve $(C_1)$ eğrisini çiziniz.

16. $y = 4 - x^2$ fonksiyonunu çiziniz.

## DOKUZÜNCÜ BÖLÜM

### Diziler. Aritmetik ve Geometrik Diziler

**Tarif. — Terimleri belli bir kanuna göre sıralanan sayılara DİZİ denir.** Bu sayıların herbirine dizinin terimi adı verilir.

ÖRNEKLER:

1. 1, 2, 4, 8, 16, ....., $2^{n-1}$ sayılar sırası bir dizidir. Çünkü, terimleri belli bir kanuna göre - her biri kendisinden önce gelenin iki katıdır - sıralanmıştır. $2^{n-1}$ dizinin «n» yinci terimidir. Bir dizide «n» yinci terime dizinin GENEL TERİMİ denilir. Bu dizinin genel terimi niçin $2^{n-1}$ dir?

2. 1, 3, 9, 27, ....., $3^{n-1}$ de bir dizidir. Terimlerin kuruluş kanununu söyleyiniz ve genel terimi niçin $3^{n-1}$ dir ?

3. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots\ldots, \frac{2^n-1}{2^n}$ dizisi de, terimlerinin paydaları 2 nin kuvvetleri, payları ise paydalarından bir eksik sayılar olarak sıralanmıştır. Genel terim niçin $\frac{2^n-1}{2^n}$ dir? Genel terimde «n» ye 1, 2, 3, ... değerlerini verdiğinizde ne görüyorsunuz ?

4. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ dizisinde tek terimler pozitif, çift terimler negatif işaretlidir. Paylar sabit olup «1» dir; paydalar ise, 2 den başlıyan tabiî sayılar dizisidir. Genel terimi düşününüz ve genel terimde «n» ye 1, 2, 3, ... değerini verdiğinizde neleri elde ediyorsunuz ?

### 2. Diziler üzerine ödevler.

Aşağıdaki dizilerin kuruluş kanunlarını bulunuz ve genel terimlerini yazınız.

1) 1, 4, 9, 16, ...; 2) $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \ldots$.

3) $4, -2, +1, -\frac{1}{2}, \ldots$

(terimlerin $\frac{4}{1}, -\frac{4}{2}, -\frac{4}{4}, -\frac{4}{8}; \ldots;$ şeklinde yazılabileceğine dikkat ediniz);

Genel terimleri verilen, aşağıdaki dizilerin ilk dört terimini yazınız;

1) $n^2x^2$; 2) $\frac{x^n}{1+\sqrt{n}}$; 3) $\frac{n+2}{n^2+1}$; 4) $\frac{n}{2^n}$.

**3. Aritmetik dizi ve özellikleri.**

**Tarif. — Herhangi bir terimin, kendisinden önce gelen terimden farkı bütün dizi boyunca sabit kalırsa, böyle dizilere ARİTMETİK dizi denilir.** Sabit farka, dizinin ORTAK FARKI; dizinin başladığı terime İLK terim ve sonuncu terime de SON terim adı verilir.

İlk terim a, ortak fark r, n yinci terim l ile gösterilir. Buna göre, aritmetik bir dizinin terimleri,

a, a + r, a + 2r, a + 3r, ... şeklindedir.

$r \neq 0$ olmak üzere, $r > 0$ ise, dizi ARTAN ve $r < 0$ ise dizi EKSİLEN'dir.

ÖRNEKLER:

1) 1, 2,3, 4, 5, ... sayılar sırası, ortak farkı r = 1 olan artan aritmetik bir dizidir. Neden?

2) —8, —6, —4, —2, 0, 2, 4, ... sayılar arası ortak farkı r = 2 olan artan aritmetik bir dizidir.

3) 10, 8, 6, 4, 2, 0, — 2, — 4, ... dizisi ortak farkı r = — 2 olan eksilen aritmetik bir dizidir.

**4. Aritmetik diziye ait özellikler.**

**1°. «n» yinci terimin hesabı.**

a, b, c, d, ... / ortak farkı r olan bir aritmetik dizi ise, tarife göre, ikinci terim b = a + r, üçüncü terim c = a + 2r, dördüncü terim

[*] Bir dizinin aritmetik dizi olduğunu göstermek üzere, ilk terimin başına ∴ işareti konabilir.

$d = a + 3r$, ..... dir. Aritmetik dizinin bu kuruluş kanunundan «n» yinci terimi (genel terim) :

$$\boxed{l = a + (n-1)\,r} \quad \text{dir.}$$

**Örnek.** — Tabiî sayılarda 113 üncü tek sayının hesabı.

Bu sayılar dizisi, ilk terimi 1 ve ortak farkı 2 olan bir aritmetik dizidir.

$$1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Burada $a = 1$, $r = 2$, $n = 113$ olduğundan :

$$l = 1 + 2(113 - 1) = 225 \quad \text{bulunur.}$$

**2°. Her terim komşu iki terimin aritmetik ortasıdır.**

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots\ldots$ bir aritmetik dizi ise, aritmetik dizi tarifine göre:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}}$$

elde edilir.

**3°. Aritmetik bir dizide baştan ve sonradan eşit uzaklıkta bulunan iki terimin toplamı, ilk terimle son terimin toplamına eşittir.**

n terimli aritmetik bir diziyi, genel olarak :

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_k, \ldots\ldots, a_{n-(k-1)}, \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$ şeklinde yazalım

Burada $a_k$ baştan «k» yinci terim; $a_{n-(k-1)}$ de sondan «k» yinci terimdir. Bu aritmetik dizinin ortak farkı r ise,

$a_k = a_1 + (k-1)r$ ; $a_{n-(k-1)} = a_1 + (n-k)r$ dir. Neden?

Bu iki eşitlik yanyana toplanır ve sadeleştirilirse,

$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_1 (n-1)r$ bulunur. Öte yandan,

$a_n = a_1 + (n-1)r$ olduğu düşünülürse,

$$\boxed{a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n}$$

bağıntısı elde edilir.

**4°. İlk «n» terim toplamı.**

n terimli aritmetik bir dizinin terimler toplamı $S_n$ ile gösterilirse,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1 \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. (1) ve (2) eşitlikleri yanyana toplanırsa :

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots\ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$ olur.

(3) üncü özellikten parantezlerin değerleri birbirine eşittir ve her birinin değeri $(a_1 + a_n)$ dir. Terim sayısının n olduğu düşünülürse;

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{bulunur.}$$

İlk terim a, son terim $l$ ile gösterilirse;

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + l)}$$

olur. ve «$l$» yerine (1) inci özellikten değeri konulursa;

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]}$$

elde edilir.

ÖRNEKLER :

1) İlk «n» tamsayılar toplamının hesabı.

Tabii sayılar dizisi 1, 2, 3, 4, ... n şeklinde aritmetik bir dizidir. Burada $a = 1$ ; $r = 1$ ve terim sayısı n ve son terimi $l = n$ dir. Buna göre,

$$S = \frac{n}{2}(1 + n) \quad \text{bulunur.}$$

2) İlk n tek sayılar toplamının hesabı.

Dizi 1, 3, 5, 7, ... şeklinde bir aritmetik dizidir. Burada $a = 1$, $r = 2$ ve terim sayısı «n» dir. Buna göre,

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r] \quad \text{formülünden,}$$

$$S = \frac{n}{2}[2 + (n-1)2] = n^2 \quad \text{bulunur.}$$

3) İlk «n» tamsayının kareleri toplamının hesabı.

İstenilen $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$ dir. Bunun için: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ özdeşliğinde sırasıyle «n» yerine $n = 0$ $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., $n = n$ konulursa,

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1 \\
(1+1)^3 &= 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1 \\
(2+1)^3 &= 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1 \\
(3+1)^3 &= 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n+1)^3 &= n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1
\end{aligned}$$

olur

Bu $(n+1)$ eşitlik alt alta toplanırsa,

$$1^3+2^3+3^3+4^3\ldots+(n+1)^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) + 3(1+2+3+\ldots+n) + (n+1) \quad \text{olur.}$$

ve sadeleştirilirse;

$$(n+1)^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) + 3(1+2+3+\ldots+n) + (n+1)$$

veya $(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + (n+1)$ olur. $S_1$ yerine değeri yazılırsa,

$$(n+1)^3 = 3S_2 + \frac{3n}{2}(n+1) + (n+1)$$

$$3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1),$$

$$3S_2 = (n+1)\left[(n+2)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right],$$

$$3S_2 = (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

olur ve son olarak,

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{elde edilir.}$$

$(n+1)^4$ ve $(n+1)^5$ e ait özdeşliklerden hareketle $S_3$ ve $S_4$ ü hesaplayınız ?

4) $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 \ldots + n(n+1)$ toplamının hesabı.

$$(*)\ S = \sum_1^n n(n+1) = \sum_1^n (n^2+n) = \sum_1^n n^2 + \sum_1^n n$$

olduğu göz önünde tutulursa,

$$S = S_2 + S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$$

elde edilir.

**Problem.** — a ve b gibi iki sayı arasına, aritmetik dizi teşkil edecek şekilde «m» kadar sayı sıkıştırmak.

Kurulacak aritmetik dizinin ilk terimi a son terimi b ve terim sayısı $m + 2$ dir. Bilinmeyen, ortak fark «r» ile gösterilirse, (1) inci özellikten,

$$b = a + (m+1)\,r$$

yazılabilir. Buradan,

$$\boxed{r = \frac{b-a}{m+1}}$$

bulunur. Ve aranılan aritmetik dizi,

$$a,\ a + \frac{b-a}{m+1},\ a + \ldots,\ \ldots,\ b \quad \text{dir.}$$

ÖRNEKLER :

1) 11 ve 35 sayıları arasına, aritmetik dizi kurmak üzere, 7 terim sıkıştırınız

$r = \frac{b-a}{m+1}$ formülü uygulanarak, yeni aritmetik dizinin «r» ortak farkı,

---

(*) $\sum_1^n n(n+1) = 1.2 + 2.4 + \ldots + n(n+1)$ yerine kullanılmıştır.

$$r = \frac{35 - 11}{7 + 1} = 3$$

bulunur. Buradan aranılan aritmetik dizi,

11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35 elde edilir.

2) 7 ve —15,5 sayıları arasına, aritmetik dizi kurmak üzere 8 terim sıkıştırınız.

Yukarıda gösterilen formüle göre, yeni aritmetik dizinin ortak farkı,

$$r = \frac{-15{,}5 - 7}{8 + 1} = -2{,}5 \quad \text{dır.}$$

ve aranılan aritmetik dizi de,

7, 4,5 2, —0,5, —3, —5,5,—8,—10,5, —13, —15,5 dir.

**5. Aritmetik diziler üzerine problemler:**

1) İlk terimi 3 ve ortak farkı 2 olan aritmetik dizinin 12 nci terimini bulunuz.

2) 10; 5,5; 1; ... aritmetik dizisinin 15 inci terimini bulunuz.

3) Ortak farkı 2,8 ve 9 uncu terimi —5,2 olan bir aritmetik dizinin ilk terimini bulunuz.

4) —3 ve 5 sayıları arasına, aritmetik dizi kurmak üzere, 11 terim sıkıştırınız.

5) Aritmetik bir dizinin üçüncü terimi 7; yedinic terimi 15 tir.

a) İlk terimi bulunuz. b) Ortak farkı bulunuz. c) 15 inci terimi bulunuz. d) İlk on beş terimin toplamını hesabediniz.

6) İlk iki terimin toplamı 10; üç ve dördüncü terimlerinin çarpımı 80 olan aritmetik diziyi kurunuz.

7) Birinci ve beşinci terimlerinin çarpımı 1296; iki, üç ve dördüncü terimlerinin toplamı 180 olan aritmetik diziyi kurunuz.

8) İlk terimini 23, n inci terimi 5 ve ortak farkı —2 olan aritmetik bir dizinin «n» terim sayısı ve S ilk n terim toplamını hesaplayınız.

(Cevap: $n = 10$, $S = 140$).

9) n ninci terimi 199, n terim sayısı 100 ve ilk n terim toplamı $S_n = 10000$ olan bir aritmetik dizinin ilk terimini ve ortak farkını bulunuz.

(Cevap : $a = 1, r = 2$).

10) n ninci terimi 18, ortak farkı 2 ve ilk n terim toplamı $S = 88$ olan bir aritmetik dizinin ilk terimini ve n terim sayısını bulunuz. (Cevap : $a = 4$; $n = 8$).

11) Bir aritmetik dizinin birbiri ardınca gelen üç teriminin toplamı 33, çarpımları 1287 dir. Bu üç terimi bulunuz (Cevap: 9; 11; 13).

12) 12 terimli bir aritmetik dizinin beş, altı, yedi ve sekizinci terimlerinin toplamı 74, dizinin iki ucundaki ilk termlerinin çarpımı 70 olduğuna göre, diziyi kurunuz. (Cevap : dizi 2, 5, 8, ..., 35).

13) Bir üçgenin kenarları, ortak farkı 3 olan bir aritmetik dizi teşkil ediyor. Bu üçgenin alanının, kenarları üçgenin küçük kenarları olan bir dikdörtgenin alanına oranı $\frac{1}{2}$ olarak verildiğine göre, üçgenin kenarlarını hesabediniz. Bu üçgene içten teğet dairenin yarıçapını bulunuz.

14) $S = 1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)$ toplamını hesabediniz. $\left(\text{Cevap : } S = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)\right)$

15) $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ toplamını hesabediniz.

$\left(\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right.$ yazılabileceğini gözönünde tutunuz.$\left.\right)$

$\left(\text{Cevap : } S = \frac{n}{n+1}\right)$.

16) $1, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \ldots$ dizisinin n ninci terimini ve ilk n teriminin toplamını bulunuz. $\left(\text{Cevap: «n» ninci terim } \frac{1}{n};\ S_n = \frac{n+1}{2}\right)$

17) $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \ldots$ dizisinin ilk n teriminin toplamını bulunuz. $\left(\text{Cevap: } S = \frac{n-1}{2}\right)$

18) $\frac{n^2-1}{n}, n, \frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}, \ldots$ dizisinin ilk n teriminin toplamını ve n ninci terimini bulunuz.

$$\left(\text{Cevap: n. ci terim } \frac{(n-1)(n+2)}{n}\ ;\ S_n = \frac{(n-1)(2n+3)}{2}\right)$$

19) Bir memur yılda 18000 lira ücretle bir memuriyete atanıyor. Ve her üç yılda bir 200 lira zam görüyor. Kasım 1970 den itibaren yılda 26000 lira ücret almaya başlıyor. Ne zaman memuriyete atanmıştır ?

20) Bir yolcu ilk günü 15 km ve her müteakıp günde 1 km daha fazla yol almak üzere A dan kalkıyor. Aynı yol üzerinde 4 gün sonra ikinci bir yolcu, birinci gün 30 km her müteakip günde yine 1 km daha fazla yürümek üzere, onu izliyor. İkinci, ne zaman ve nerede birinciye kavuşacaktır ?

### 6. Geometrik dizi ve özellikleri (*).

**Tarif.** — Herhangi bir teriminin, kendisinden önce gelen terime oranı, bütün dizi boyunca sabit kalırsa, böyle dizilere GEOMETRİK dizi denilir. Sabit sayıya ortak çarpan denir. Ortak çarpan «k», ilk terim «a» ve son terim « » ile gösterilir.

Bir geometrik dizinin ilk verimi a, ortak çarpanı k ise terimleri,

$$a, ak, ak^2, ak^3, \ldots \quad \text{şeklindedir.}$$

$0 < k \neq 1$ olmak şartiyle, $k > 1$ ise, dizi artan; $k < 1$ ise, dizi eksilendir.

ÖRNEKLER:

1) 1, 2, 4, 8, ...

ortak çarpanı $k = 2$ olan artan geometrik bir dizidir. Neden?

(*) Bir dizinin geometrik dizi olduğunu göstermek üzere, ilk terimi başına $\div$ işareti konabilir.

2) $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$ ortak çarpanı $k=\frac{1}{3}$ olan eksilen geometrik bir dizidir. Neden?

Not. — k negatif ise, dizinin terimleri sıra ile pozitif ve negatif olarak devam eder.

**7. Geometrik diziye ait özellikler :**

**1°. «n» yinci terimin hesabı.**

Ortak çarpanı k ve ilk terimi a olan bir geometrik dizinin, tarife göre genel şekli;

$$a, ak^2, ak^3, \ldots \text{ dür.}$$

Bu kuruluş kanununa göre, «n» yinci son terim,

$$\boxed{l = ak^{n-1}} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEKLER :

1) $15, 30, 60, \ldots, l$ artan geometrik dizinin 6 nci terimini bulunuz.

$$l = 15 \cdot 2^{6-1} = 480 \quad \text{elde edilir.}$$

2) $32, 8, 2, \ldots, l$ eksilen dizinin 5 inci terimini bulunuz.

Burada $a = 15$, $k = 2$ dir. Yukarıda gösterilen formülden,

$$l = 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{8} \quad \text{bulunur.}$$

**2°. Her terim, komşu iki terimin geometrik ortasıdır.**

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$ bir geometrik dizi ise, tarife göre :

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

dir. Buradan,

$$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}}$$

bulunur.

**3°. Geometrik dizide, baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı, ilk ve son terimlerin çarpımına eşittir.**

$a_1, a_2 \ldots, a_i, \ldots, a_{n-(i-1)}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ geometrik bir dizi olsun. Burada $a_i$ baştan «i» ninci terimi, $a_{n-(i-1)}$ de sondan «i» ninci terimi göstermektedir. Ortak çarpan «k» ise, birinci özellikten,

$$a_i = a_1 . k^{i-1} \quad \text{ve} \quad a_{n-(i-1)} = a_1 . k^{n-i} \quad \text{dir.}$$

Bu iki eşitlik yanyana çarpılırsa;

$a_i \cdot a_{n-(i-1)} = a_1 \cdot a_1 \cdot k^{n-1}$ elde edilir. Öte yandan, $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$ olduğu düşünülürse,

$$\boxed{a_i . a_{n-(i-1)} = a_1 . a_n}$$

bağıntısı bulunur.

**4°. n terimli geometrik bir dizinin terimlerinin çarpımı, ilk ve son terimler çarpımının «n» ninci kuvvete yükseltilmesinin kare köküne eşittir.**

Geometrik dizi,

$a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ olsun. Bu «n» terimin çarpımı, P ile gösterilirse:

$$P = a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_{n-2} . a_{n-1} . a_n \quad \text{veya,}$$

$$P = a_n . a_{n-1} . a_{n-2} \ldots a_3 . a_2 . a_1 \quad \text{yazılabilir.}$$

Bu eşitlikler yanyana çarpılırsa:

$$P^2 = a_1 . a_n . a_2 . a_{n-1} . a_3 \ldots a_{n-2} a_3 . a_{n-1} a_2 . a_n a_1 \quad \text{olur.}$$

Ve üçüncü özellikten:

$$a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \ldots$$

dir ve çarpan grubunun n tane olduğu düşünülürse:

$$P^2 = (a_1 a_n)^n \quad \text{olur, veya}$$

$$\boxed{P = \sqrt{(a_1 a_n)^n}} \quad \text{bulunur.}$$

Bu formülde $a_n$ yerine değeri $a_1 k^{n-1}$ yerleştirilirse,

$$P = a^n . k^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{şeklini alır.}$$

NOT: n(n—1) çarpımı birbiri ardınca iki sayı çarpımı olduğundan daima 2 ile bölünür.

5°. İlk «n» terim toplamının hesabı.

Aranılan toplamı S ile gösterelim :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n , \qquad (1)$$

Bu toplamın her iki yanını ortak çarpan k ile çarpalım.

$$S_n k = a_1 k + a_2 k + \ldots + a_{n-1} k + a_n k \quad \text{olur.} \qquad (2)$$

a) $k > 1$; diz artansa (1) denklemi (2) denkleminden çıkarılır ve $a_2 = a_1 k$, $a_3 = a_2 k$, ... olduğu gözönünde tutulursa,

$$S_n (k - 1) = a_n k - a_1 \quad \text{olur, veya,}$$

$$S_n = \frac{a_n k - a_1}{k - 1} \quad \text{bulunur.}$$

$a_n$ yerine değeri $a_1 k^{n-1}$ yerleştirilir ve ilk terim $a_1$ de sadece «a» ile gösterilirse;

$$S_n = \frac{a k^n - a}{k - 1} \quad \text{olur, veya}$$

$$\boxed{S = \frac{a (k^n - 1)}{k - 1}} \qquad (3)$$

formülü elde edilir. $k>1$ olduğundan $S_n$; n terim sayısı büyüdükçe, sınırsız olarak artar. Burada $n \to \infty$ olması halinde, terimler toplamının belirli bir limiti haiz olmıyacağı anlaşılır. Böyle bir diziye Iraksak dizi denir. $K = 1$ ise, $S_n$ yi bulunuz ?

b) $k < 1$; dizi eksilense, (2) denklemi (1) denkleminden çıkarılır;

$$S_n (1 - k) = a_1 - a_n k \quad \text{olur, veya,}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n k}{1 - k} \quad \text{bulunur.}$$

$a_n$ yerine değeri konulur ve ilk terim de «a» ile gösterilirse,

$$\boxed{S_n = \frac{a - a k^n}{1 - k}} \quad \text{olur, veya, (4)}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a (1 - k^n)}{1 - k}}$$

formülü elde edilir. Eksilen geometrik dizinin, terimleri toplamını ve-

ren $S_n$ nin $n \to \infty$ için limitini düşünelim. $0 < k < 1$ olduğundan, $\lim k^n \to 0$ olacağı gözönünde tutulursa;

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-k} \quad \text{bulunur.} \quad (5)$$

O halde, $k < 1$ olduğunda, geometrik dizinin sonsuz sayıdaki terimlerinin toplamının belirli bir değeri mevcuttur. Böyle bir diziye Yakınsak dizi adı verilir.

ÖRNEKLER:

1) $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$ geometrik dizisinin sonsuz sayıdaki terimlerinin toplamını bulunuz.

Burada $a = 6$, $k = \frac{1}{3}$ tür. (5) formülüne göre:

$$S = \frac{6}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \quad \text{bulunur.}$$

2) 0,732 732 732 ... basit periyodik kesirini doğuran bayağı kesiri bulunuz.

Bu ondalık kesir x ile gösterilirse,

$$x = 0{,}732\,732\,732\ldots = 0{,}732 + 0{,}000\,732 + 0{,}000000\,732 + \ldots$$

veya,
$$x = \frac{732}{1000} + \frac{732}{(1000)^2} + \frac{732}{(1000)^3} + \ldots$$

şeklinde yazılabilir.

Bu da, ilk terimi $\frac{732}{1000}$ ve oratak çarpanı $k = \frac{1}{1000}$ olan bir geometrik dizinin terimleri toplamıdır. Ve basit periyodik kesiri doğuran bayağı kesir de geometrik dizinin sonsuz sayıdaki terimlerinin toplamından başka bir şey değildir. O halde, (5) formülüne göre,

$$x = \frac{\frac{732}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{732}{999} \quad \text{bulunur.}$$

**Problem. — a ve b gibi iki sayı arasına, geometrik dizi teşkil edecek şekilde, «m» kadar sayı sıkıştırmak.**

Bu problem, ilk terimi a, son terimi b olmak üzere, m + 2 terimli bir geometrik dizi kurmak demektir. Bilinmiyen ortak çarpan k ise,

$b = ak^{m+1}$ olur. Buradan,

$$k = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \quad \text{ve dizi de,}$$

$$a,\ a \cdot \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\quad a \cdot \sqrt[m+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ \ldots\ldots,\ b \text{ dır.}$$

Örnek : 1 ve 256 sayıları arasına, geometrik dizi kurmak üzere, 3 terim sıkıştırınız.

a = 1, b = 256 ve terim sayısı 2 + 3 = 5 dir. Yukarda bulunan formülden ;

$$k = \sqrt[4]{\frac{256}{1}} = \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{elde edilir.}$$

Aranılan dizi de,

1, 4, 16, 64, 256 dır.

**8. Geometrik dizi üzerine problemler :**

1) İlk terimi 1 ve ortak çarpanı 2 olan geometrik bir dizinin 17 nci terimini bulunuz.

2) 32 ve 243 sayıları arasına, geometrik dizi kurmak üzere, dört terim sıkıştırınız.

3) $3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}$ .. geometrik dizisinin ilk beş terim toplamını hesap ediniz.

4) $2, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}$... geometrik dizisinin sonsuz sayıdaki terimlerinin toplamının limiti nedir ?

5) Aşağıdaki periyodik ondalık kesirleri doğuran bayağı kesirleri bulunuz.

a) 0,3 47 47 ...; b) 0,28 433 433 ...; c) 3,25 498 498 ...

6) $\frac{5}{3}, \frac{7}{3^2}, \frac{5}{3^3}, \frac{7}{3^4} \cdots$ sonsuz terimli sayılar dizisinin terimleri toplamının limitini bulunuz. (Bu dizinin terimleri toplamının, iki eksilen geometrik dizinin terimler toplamı olduğuna dikkat ediniz).

7) Bir geometrik dizinin terimleri toplamının limiti 2 dir. Dizinin ilk terimi a, ortak çarpanı k ile gösteriliyor. Dizinin ilk terimi k ve ortak çarpanı a olsa idi, terimler toplamının limit $\frac{1}{3}$ olacaktı. a ve k yı bulunuz ve diziyi kurunuz.

8) x, y, z bir geometrik dizinin üç ardarda terimi ise;

$$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$$

bağıntısının varlığını ispat ediniz.

9) Bir kare alınıyor, bu karenin kenarlarının ortalarını birleştirerek yeni bir kare elde ediliyor. Ve böylece her karenin kenarlarının orta noktalarını birleştirmek suretiyle kareler elde edilmeye devam olunuyor. Bu karelerin alanlarının ve çevrelerinin toplamları hangi limite doğru yaklaşır ?

10) Bir kenarı a olan eşkenar bir üçgen veriliyor. Bu üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek ikinci bir eşkenar üçgen elde ediliyor ve buna sonsuz surette devam olunuyor. Bu üçgenlerin alanlarının ve çevrelerinin toplamları hangi limite doğru yaklaşır ?

11) Bir yarım çemberin yarıçapı üzerine bir yarım çember çiziliyor; yarıçapın yarısı üzerine diğer bir yarım çember çiziliyor ve böylece sonsuz surette devam ediliyor. Çizilen iç yarım çemberlerin çevreleri toplamının limitini bulunuz.

12) Ortak farkı pozitif olan bir aritmetik dizinin ilk üç terimini o suretle bulunuz ki; bu ilk üç terimin toplamı «a» olsun ve bu terimlerden birincisini 4, ikincisini 6 ve üçüncüsünü 25 le çarptıkta bir geometrik dizinin üç ardarda terimi elde edilsin. Bu suretle bulunacak aritmetik ve geometrik dizileri yazınız.

13) Son termi 1280, ilk terimi 5 ve terim sayısı 9 olan bir geometrik dizinin ortak çarapanını ve terimlerinin toplamını bulunuz.
(Cevap : $k = 2$ ; $S_n = 2555$).

14) Aşağıdaki geometrik dizilerin sonsuz sayıdaki terimlerinin toplamını bulunuz.

a) $8+4+2+1+\frac{1}{2}+\cdots$ (Cevap: $S=16$)

b) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$ $\left(\text{Cevap: } S=\frac{4}{3}\right)$

c) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots$ (Cevap: $S=4+3\sqrt{2}$)

15) Aşağıdaki toplamların $n\to\infty$ için limiti nedir?

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\ldots\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\right) \quad \text{(Cevap: } S=1\text{)}.$$

16) $x=0{,}86\,534\,534\,534\ldots$ periyodik ondalık kesirini doğuran bayağı kesiri bulunuz.

$$\left(\text{Cevap: } x=\frac{85448}{99900}\right)$$

17) Bir kenarının uzunluğu $a_1$ olan eşkenar bir üçgen içine $r_1$ yarıçaplı teğet daire çiziliyor. Bu daire içine $a_2$ kenarlı ve bir eşkenar üçgen çiziliyor. Bu ikinci üçgen içine $r_2$ yarıçaplı daire çiziliyor. Ve buna sonsuz sayıda devam ediliyor;

a) İçten teğet dairenin $r_1+r_2+r_3\ldots$ yarıçapları toplamının limitini;

$$\left(\text{Cevap: } \Sigma r=\frac{a_1}{3}\sqrt{3}\right)$$

b) Eşkenar üçgenlerin $a_1+a_2+a_3+\ldots$ kenarları toplamının limitini; (Cevap : $\Sigma a=2a_1$)

c) Dairelerin yüzeylerinin toplamının limitini;

$$\left(\text{Cevap: } \Sigma S=\frac{\pi a_1^2}{9}\right)$$

d) Üçgenlerin yüzeylerinin toplamının limitini;

$$\left(\text{Cevap: } \Sigma S=\frac{a_1^2}{9}\sqrt{3}\right)$$

e) Yüksekliklerinden bir etrafında eşkenar üçgenlerin dönmesiyle meydana gelen hacımların toplamının limitini bulunuz.

$$\left(\text{Cevap: } \Sigma v = \frac{\pi a_1^2 . \sqrt{3}}{21}\right)$$

18) Üç sayı hem aritmetik ve hem de geometrik dizi kurabiliyorlarsa, birbirlerine eşittirler.

19) $1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^5} + \ldots$ ifadesinin, $|a| > 1$ olduğuna göre, $n \to \infty$ için değerini hesabediniz.

20) $S = x - y + \frac{y^2}{x} - \frac{y^3}{x^2} + \ldots$ ifadesinin $\left|\frac{y}{x}\right| > 1$ olduğuna göre, $n \to \infty$ için değerini hesabediniz.

21) $1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + \ldots + \overbrace{111\ldots1}^{n}$ toplamını hesap ediniz.

# ONUNCU BÖLÜM

## Bileşik faiz ve taksitle borç ödeme

### 1. Bileşik faiz.

**Tarif.** — Faize verilen bir kapitalin birinci zaman aralığı sonunda getirdiği faiz de, faizi işlemek üzere, kapitale katılır ve bu işlem her zaman aralığı sonunda tekrarlanırsa; kapital bileşik faize verilmiştir, denir. Zaman aralığı, ekseriya, bir yıl veya altı aydır.

Zaman aralığı bir yıl ve faiz fiatı r olmak üzere, bileşik faize yatırılan A kapitalinin n yıl sonundaki tutarını bulalım :

Birinic yıl sonunda 100 lira 100 + r olacağı için, A kapitalinin birinci yıl sonundaki tutarı $A_1$ ile gösterilirse,

$$A_1 = \frac{A(100+r)}{100} = A\left(1+\frac{r}{100}\right) \quad (1) \text{ lira olur.}$$

İkinci yıl sonunda, bu yeni $A_1$ kapitalinin tutarı, aynı düşünüşle,

$$A_2 = A_1\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

olur. $A_1$ yerine (1) deki değeri yazılırsa,

$$A_2 = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \quad (2) \text{ olur.}$$

Üçüncü yıl sonunda bu yeni $A_2$ kapitalinin tutarı,

$$A_3 = A_2\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

olur veya (2) den $A_2$ nin değeri yerine yazılırsa,

$$A_3 = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 \quad (3) \text{ lira olur.}$$

Böyle devamla, «n» inci yıl sonunda A kapitalinin tutarını veren,

$$\boxed{A_n = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n} \quad (I)$$

formülü elde edilir. $1 + \frac{r}{100} = k$ ile gösterilirse,

$$\boxed{A_n = Ak^n} \quad \text{olur.}$$

«k» ya faiz çarpanı adı verilir.

NOT. 1 — Zaman aralığı altı ay ise; yıllık faiz yüzde r olmak üzere, 100 lira altı ay sonra $100 + \frac{r}{2}$ olacağı için, A kapitalinin altı ay sonundaki tutarı :

$$A_1 = \frac{A\left(100 + \frac{r}{2}\right)}{100} = A\left(1 + \frac{r}{200}\right) \quad (1) \text{ lira olur.}$$

İkinci altı ay sonunda $A_1$ yeni kapitalinin tutarı :

$$A_2 = A_1\left(1 + \frac{r}{200}\right) = A\left(1 + \frac{r}{200}\right)^2$$

olur. Böylece devamla, n yıl sonunda, yani zaman aralığı 2 n olursa,

$$A_{2n} = A\left(1 + \frac{r}{200}\right)^{2n} \quad \text{bulunur.}$$

2. (1) formülünde n, kapitalin faizde kaldığı süreyi tam yıl olarak gösteriyordu. Bu süre tam yıl değilse, gün veya az kısmı senenin kesiri şeklinde ifadde edilir. Meselâ süre 6 yıl 9 ay ise, bu $6 + \frac{3}{4}$ yıl şeklinde yazılır. Yılın kesir kısmı «f» ile gösterilirse, (1) formülü

$$A_n = A\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n+f} \quad \text{şeklini alır.}$$

3. Malî işlerde yıl 360 gün ve ay 30 gün kabul edilir.

Sonuç. — Bileşik faiz esas formülü (1) den, logaritma yardımı ile üç problem çözülebilir.

a) A kapitali bilinmiyorsa (I) formülünden,

$$A = \frac{A_n}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n} \quad (II)$$

elde edilir ve logaritma yardımı ile,

$$\log A = \log A_n - \log n \,.\, \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) \quad \text{hesabolunur.}$$

b) r bilinmiyorsa (I) den,

$$1 + \frac{r}{100} = \sqrt[n]{\frac{A_n}{A}} \qquad \text{(III)}$$

ve logaritma yardımı ile,

$$\log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{1}{n}(\log A_n - \log A) \text{ hesabolunur.}$$

c) «n» bilinmiyorsa, (I) formülünün iki yanının logaritması alınırsa;

$$\log A_n = \log A + n \,.\, \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) \quad \text{olur. Ve buradan}$$

$$n = \frac{\log A_n - \log A}{\log\left(1 + \frac{r}{100}\right)} \qquad \text{(IV)}$$

elde olunur.

**2. Taksitle kapital teşkili ve borç ödeme.**

**Tarif.** — İstenilen bir kapitali teşkil etmek veya bir borcu ödemek için, belirli bir süre sonunda ve eşit zaman aralıklarında bileşik faize yatırılan sabit para miktarına TAKSİT denir.

Taksit hesaplarında üç hal düşünülebilir :

1°. Her yıl başında a miktar para yatırılır ve faiz yüzdesi de, r ise, «n» yıl sonunda tutarı, $a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = ak^n$ olur. İkinci yıl başında yatırılan a miktar para, (n — 1) yıl bileşik faizde kalacağı için, süre sonunda tutarı $ak^{n-1}$ olur. Üçüncü yıl başında yatırılan a miktar parada, (n — 2) yıl bileşik faizde kalacağı için tutarı $ak^{n-2}$ olur. Böylece devamla, sonuncu yıl başında yatırılan a miktar para, «1» yıl faizde kalacağı için, tutarı «ak» olur. Bunların $S_n$ toplamı,

$$S_n = ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-2} + ak^{n-1} + ak^n \quad \text{olur.}$$

Bu da, «n» yinciy ıl sonunda teşekkül eden kapitali verir. $S_n$, ilk terimi «ak» ve ortak çarpanı k olan bir geometrik dizi teşkil ettiği için :

$$\boxed{S_n = a.k\,\frac{k^n - 1}{k - 1}} \qquad \text{(V)} \quad \text{olur.}$$

2°. Birinci yıl başında A ve her yıl sonunda a miktar para yatırıldığında, «n» ninci yıl sonunda teşekkül edecek kapitalin hesabı:

Birinic yıl başında yatırılan A miktar para, «n» yıl faizde kalacağı için, bu süre sonunda «$A \cdot k^n$» olur. (k faiz çarpanıdır.)

Birinci yıl sonunda yatırılan a miktar para da $n-1$ yıl faizde kalacağı için, $n-1$ yıl sonunda tutarı $ak^{n-1}$ olur. İkinci sene sonunda yatırılan a miktarı ise $n-2$ yıl faizde kalacağı için, süre sonunda tutarı $ak^{n-2}$ olur. Böylece devamla; sonuncu yıl sonunda yatırılacak a miktarı faizde kalamıyacağı için, faiz getirmez ve a olarak kalır.

Bunların $S_n$ toplamı, $S_n = Ak^n + (a + ak + ak^2 + \cdots + ak^{n-2} + ak^{n-1})$ «n» yinci yıl sonunda teşekkül eden kapitali verir. $S_n$ ifadesinde, parantez içi; ilk terimi a, ortak çarpanı k ve terim sayısı «n» olan geometrik bir dizi teşkil ettigi için:

$$S_n = Ak^n + a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \qquad \text{(VI)}$$

elde edilir. Özel olarak, $A = 0$ olursa, yani her yıl sonunda «a» miktar para yatırılırsa ve «n» yinci yıl sonunda teşekkül edecek kapital, S ile gösterilirse:

$$S_n = Ak^n + a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ bulunur.}$$

3°. Bir ikrazın sabit «a» taksitleriyle ödenmesine borç ödeme denir.

İstikraz olunan para miktarı A, ödeme süresi «n» yıl ise ve istikrazdan bir yıl sonra taksitlerin yatırılması şart koşulursa (faiz yüzdesi r dir).

Birinci «a» taksiti $n-1$ yıl bileşik faizde kalacağı için «n» yıl sonunda tutarı, $ak^{n-1}$ olur.

İkinci «a» taksiti $n-2$ yıl bileşik faizde kalacağı için, süre sonunda tutarı $a \cdot k^{n-2}$ olur. Böylece devamla, sonuncu «a» taksiti faizde kalmıyacağı için, faiz getirmez. Bunların toplamı,

$$a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad \text{olur.}$$

İstikraz olunan A miktar para ise, «n» yıl bileşik faizde kalacağı için, «n» ninci yıl sonunda tutarı, «$A \cdot k^n$» olur. Bu miktarın ödenmiş olabilmesi için:

$$\boxed{Ak^n = a \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}} \qquad \text{(VII)} \quad \text{olmalıdır.}$$

**Soru.** — Taksitlerin, istikraz tarihinden «m» yıl sonra yatırılması şart koşulursa, bu formülün alacağı şekli bulunuz.

ÖRNEKLER :

1) 1000 liralık bir kapital % 6 faiz fiyatiyle 21 yıl bileşik faizde bırakılırsa, bu zaman sonunda tutarı ne olur ?

(I) formülü,

$$A_n = A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \quad \text{idi.}$$

İki yanın logaritması alınırsa,

$$\log A_n = \log A + n \cdot \log\left(1+\frac{r}{100}\right) \quad \text{olur.}$$

Problemde,

$A = 1000$, $n = 21$ ve $r = 2$ olduğundan,

$\log A_n = \log 1000 + 21 \cdot \log 1{,}06$ olur veya,

$\log A_n = 3 + 0{,}53151 = 3{,}53151$ ve buradan,

$A_n = 3400{,}23$ lira bulunur.

2) 12000 lira, bileşik faizde 16 yılda 20240 liraya varıyor. Faiz fiyatı nedir ?

(III) formülünden,

$$1+\frac{r}{100} = \sqrt[16]{\frac{20240}{12000}}$$

. Her iki yanın logaritması alınırsa;

$$\log\left(1+\frac{r}{100}\right) = \frac{1}{16}(\log 20240 - \log 12000)$$

$$\text{» } = \frac{1}{16}(4{,}30621 - 4{,}07918)$$

$$\text{» } = \frac{1}{16}\,0{,}22703 = 0{,}01419 \quad \text{olur.}$$

Ve buradan, logaritma cedveli yardımı ile,

$$1+\frac{r}{100} = 1{,}0332 \quad \text{ve}$$

$r = 3{,}32$ bulunur.

O halde faiz fiyatı % 3,32 dir.

3) Ne kadar zaman sonunda, % 6 dan, bileşik faize konmuş bir kapital 3 katına varır ?

$$A_n = A\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \text{ idi.}$$

Problemde, $A_n = 3A$, $r = 6$ dır. Buna göre :

$$3 = (1 + 0{,}06)^n,$$

yazılabilir. Her iki yanın logaritması alınırsa,

$$\log 3 = n \,.\, \log 1{,}06 \quad \text{ve}$$

$$n = \frac{\log 3}{\log 1{,}06} = \frac{0{,}4771}{0\,0253} = 18 \text{ yıl, } 10 \text{ ay, } 10 \text{ gün bulunur.}$$

4) Hangi kapital 10 yılda % 5 faiz fiyatıyle, bileşik faize bırakıldığında, 12640 liraya varır ?

(II) formülünden,

$$A = \frac{12640}{(1{,}05)^{10}}$$

yazılır ve her iki yanın logaritması alınırsa;

$$\log A = \log 12640 - 10 \,.\, \log 1{,}05,$$

$$\log A = 4{,}10175 - 0{,}2119 = 3{,}88985 \quad \text{ve}$$

$A = 7760$ lira bulunur.

**3. Bileşik faiz, kapital teşkili ve borç ödeme üzerine problemler :**

1) Bir kimse % 5 den 12 yıl süre ile 1800 lirayı bileşik faize yatırıyor. Bu süre sonunda parasının tutarı ne kadar olur ?

2) Bir kimsenin % 6 dan bileşik faize yatırdığı kapitali, 8 yıl sonunda 25000 liraya varıyor. Bu kimsenin faize yatırdığı kapital ne kadardır ?

3) 40000 lira 17 yıl bileşik faizde kalırsa 86000 liraya varıyor. Yüzde faiz fiyatı ne idi ?

4) 35000 liralık bir kapital % 6 dan bileşik faize yatırılıyor ve 47500 lira oluyor. Kaç yıl süre ile, kapital, faizde kalmıştır ?

5) Bileşik faize % 6 dan yatırılan bir kapital, ne kadar zaman faizde kalmalıdır ki, tutarı ilk kapitalin 2 katı olsun ?

6) 35500 liralık bir kapital % 6 dan 2 yıl süre ile bileşik faize yatırılıyor. Ayni kapital, ayni faiz fiyatiyle ve basit faiz yolu ile ne kadar zamanda ayni tutarı verecektir ?

7) 8000 lira % 5 faiz fiyatiyle 12 yıl bileşik faizde bırakılmıştır. Aynı süre içinde aynı paranın % 5,5 faiz fiyatiyle ve basit faiz yolu ile getireceği faiz ne olmalıdır ?

8) Bir kimse her yıl başında, bileşik faiz yolu ile, % 6 dan 15000 lira yatırıyor. 15 yıl sonunda ne kadar para olacaktır ,

9) Sabit bir miktar para, her yıl başında, % 5,5 dan bileşik faiz yolu ile 15 yıl süre ile faize yatırılarak 50000 liralık bir kapital elde edilmek isteniyor. Yılda verilmesi gereken taksit nedir ?

10) Bir kimse her yıl başında 900 lirayı bileşik faize % 5 den yatırıyor. Kaç yıl sonunda 1615,2 lira olacaktır.

11) Bir baba, 1 şubat 1951 de iki yaşında bulunan oğlunun, 21 yaşına vardığında 1500 liralık bir kapital edinmesini istiyor. Bu kapitali teşkil etmek için her yılın 1 şubatında % 5,5 dan bileşik faiz yolu ile belirli bir miktar para faize yatırıyor. Her yıl yatırdığı para miktarı ne olmalıdır ?

12) Bir kimse, bir ev satın almak için 40000 lira istikraz ediyor. Evin safi geliri 3000 liradır. Borcunu bir an evvel ödemek üzere, bu yıllık gelirn 2400 lirasını her yıl borca veriyor. Faiz fiyatı % 4,5 dan olduğuna göre, kaç yıl sonra borcunu ödeyebilecek ve serbest kalacaktır ?

13) 600 milyonluk bir borç 50 tane yıllık taksitle ödenecektir. Bileşik faiz fiyatı % 6 dan olduğuna göre, taksitlerin miktarı nedir ?

14) Bir milyon liralık bir istikrazın 25 tane yıllık taksitle ödenmesi isteniyor. Yalnız ilk taksite beşinci yıl sonunda başlanması şart koşulmuştur. Faiz fiyatı % 4,5 olduğuna göre, bu taksit ne kadardır ?

15) Bir il, % 5 faizle 3 milyon liralık bir istikraz yapıyor ve borcu 25 yılda ödemek istiyor. Her yıl faiz ve amortisman için, bütçesinden, ne kadar ayırmalıdır ?

16) % 3,75 le hesap yapıldığına göre, 7000 liralık bir borç 11 senede ne kadar taksitle ödenir ?

17) 2100 liralık bir borç her yıl sonunda 945 liralık taksitle ödenecektir. % 4 faiz fiyatiyle, bileşik faiz hesabı yapıldığına göre, bu borç kaç yılda ödenir ?